

# 基于决策者风险偏好的区间直觉模糊数多属性决策方法\*

## Multi-criteria Decision-making Method Based on Risk Attitude under Interval-valued Intuitionistic Fuzzy Environment

王中兴,黄娜\*\*,黄帅

WANG Zhong-xing, HUANG Na, HUANG Shuai

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(School Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:**依据决策者的风险偏好,将区间直觉模糊数转化为含参数直觉模糊数,然后基于直觉模糊数投票模型和人们从众心理分析直觉模糊数的犹豫度对其得分的影响,进而定义直觉模糊数新的得分函数,并以此作为区间直觉模糊数的排序指标,提出一种新的区间直觉模糊数模糊决策方法,最后通过例子验证该方法的可行性和有效性。

**关键词:**区间直觉模糊数 得分函数 风险偏好 决策方法

**中图分类号:**C934 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2014)02-0173-06

**Abstract:** We present a new method for multi-criteria fuzzy decision making based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets. First the decision maker's risk attitude is induced for converting an interval-valued intuitionistic fuzzy number to be a parametric intuitionistic fuzzy number. Then by considering decision makers' herd behavior when he/she hesitates in an election, the hesitancy degree impacts on the scores of intuitionistic fuzzy numbers. According to above analysis, a new score function is defined and used for ranking interval-valued intuitionistic fuzzy numbers. Furthermore, a method is proposed to deal with multi-criteria fuzzy decision making problems based on the new score function. Finally, a numerical example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the new method.

**Key words:** interval-valued intuitionistic fuzzy number, score function, risk-attitude, decision-making method

1986年,Atanassov<sup>[1]</sup>对Zadeh<sup>[2]</sup>提出的模糊集进行拓展,提出直觉模糊集的概念,从隶属度、非隶属度和犹豫度3方面刻画事物的模糊性。与传统的模糊

集相比,直觉模糊集在处理模糊性和不确定性等方面更具灵活性和实用性。1989年,Atanassov等<sup>[3]</sup>又对直觉模糊集进一步推广,提出区间直觉模糊集的概念。后来,Atanassov等<sup>[4]</sup>定义了区间直觉模糊集的基本运算法则,徐泽水<sup>[5]</sup>又在此基础上进一步规范了区间直觉模糊数的基本运算法则,并提出区间直觉模糊数加权几何算子(IIFWGA)和加权算术集成算子(IIFWAA),Xu等<sup>[6]</sup>提出区间直觉模糊加权平均算子(IIFWA)、有序加权平均算子(IIFOWA)和混合集成算子(IIFHA)等区间直觉模糊数集成算子。在模糊多属性决策中,常遇到模糊数的排序问题,文献[7~

收稿日期:2013-09-30

修回日期:2013-12-11

作者简介:王中兴(1962-),男,教授,主要从事优化与决策研究。

\*国家自然科学基金项目(71261001),教育部人文社会科学基金项目(12YJC630080)资助。

\*\*通讯作者:黄娜(1986-),女,硕士研究生,主要从事优化与决策研究,E-mail:youlanhn@163.com。

13]已对直觉模糊数的排序进行了大量的研究,并取得了一定的成果.然而,描述事物信息的隶属度和非隶属度有时并非一个确切的实数,而是区间数.基于此情况,文献[5]率先提出基于区间直觉模糊数的得分函数与精确函数的区间直觉模糊数的排序方法,然而该排序方法存在某些区间直觉模糊数无法比较优劣的情况.为此,Wang等<sup>[14]</sup>基于区间直觉模糊数隶属区间、非隶属区间和犹豫区间的不确定性,提出了4个函数指标并以此作为排序区间直觉模糊数的方法,还验证了该方法对任意的区间直觉模糊数均能进行优劣比较.但该方法指标过多,不易操作.之后Ye<sup>[15]</sup>考虑了事物的犹豫信息对排序的影响,提出新的排序指标.同样地,V. Lakshmana等<sup>[16]</sup>又考虑隶属度和犹豫度对区间直觉模糊数优劣的影响,提出一种新的精确函数作为区间直觉模糊数的排序指标,但是文献[15,16]中的排序方法仍然未能克服排序失效的情况.谢海斌等<sup>[17]</sup>又提出直觉模糊数的排序指标,谢海斌等<sup>[18]</sup>采用几何的方法从直观的角度将直觉模糊数的排序指标推广到区间直觉模糊数的排序指标,但该指标同样也存在对某些区间直觉模糊数无法排序的情况.总之,以上的排序方法都主要从客观角度对区间直觉模糊数进行排序.而事实上,对于同一组区间直觉模糊数的排序结果可能并不唯一,它会依据决策者的不同风险偏好而有所改变.本文针对以上情况,考虑决策者的风险偏好对决策的影响,通过引入表达决策者风险偏好的参数,提出排序区间直觉模糊数的含参得分函数.

## 1 区间直觉模糊集

### 1.1 基本概念

**定义 1.1**<sup>[3]</sup> 设  $X$  为一个非空集合,称  $\tilde{A} = \{ \langle x, \tilde{\mu}_A, \tilde{\nu}_A \rangle \mid x \in X \}$  为区间直觉模糊集,其中  $\tilde{\mu}_A(x) \subset [0, 1], \tilde{\nu}_A(x) \subset [0, 1]$ ,且满足条件

$$0 \leq \sup \tilde{\mu}_A + \sup \tilde{\nu}_A \leq 1, \forall x \in X.$$

可将区间直觉模糊集记为  $\tilde{A} = \{ \langle x, [\tilde{\mu}_A^L(x), \tilde{\mu}_A^U(x)], [\tilde{\nu}_A^L(x), \tilde{\nu}_A^U(x)] \rangle \mid x \in X \}$ . 且  $\tilde{\pi}_A(x) = [\tilde{\pi}_A^L(x), \tilde{\pi}_A^U(x)]$  表示  $x$  相对于集合  $\tilde{A}$  的犹豫区间,其中  $\tilde{\pi}_A^L(x) = 1 - \tilde{\mu}_A^U(x) - \tilde{\nu}_A^U(x), \tilde{\pi}_A^U(x) = 1 - \tilde{\mu}_A^L(x) - \tilde{\nu}_A^L(x)$ .

显然,当  $\tilde{\mu}_A^L(x) = \tilde{\mu}_A^U(x), \tilde{\nu}_A^L(x) = \tilde{\nu}_A^U(x)$  时,区间直觉模糊集就退化成通常的直觉模糊集.

由定义 1.1 知:区间直觉模糊集的基本组成单位是  $X$  中元素  $x$  属于  $\tilde{A}$  的隶属区间和非隶属区间组成的有序区间对,称之为区间直觉模糊数,记为  $([a, b],$

$[c, d])$ <sup>[5]</sup>,其中  $[a, b] \subset [0, 1], [c, d] \subset [0, 1]$ ,且  $b + d \leq 1$ . 将全体区间直觉模糊数的集合记为  $\tilde{\Theta}$ . 对直觉模糊数  $\alpha = (\mu_\alpha, \nu_\alpha)$ <sup>[19]</sup>,可用投票模型进行解释,如  $(\mu_\alpha, \nu_\alpha) = (0.3, 0.5)$ ,其物理意义为,对某项方案进行投票,有 30% 的人投赞成票,50% 的人投反对票,还有 20% 的人犹豫不决或弃权.

**定义 1.2**<sup>[5]</sup> 设  $\tilde{\alpha}_1 = ([a_1, b_1], [c_1, d_1])$  和  $\tilde{\alpha}_2 = ([a_2, b_2], [c_2, d_2])$  为两个区间直觉模糊数,若  $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$  且  $c_1 \geq c_2, d_1 \geq d_2 \Rightarrow \tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2$ , 当且仅当  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$  且  $c_1 = c_2, d_1 = d_2$  时,  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ .

显然,  $\tilde{\alpha}^+ = ([1, 1], [0, 0]), \tilde{\alpha}^- = ([0, 0], [1, 1])$  分别为最大和最小区间直觉模糊数.

### 1.2 区间直觉模糊数的运算法则及集成算子

**定义 1.3**<sup>[6]</sup> 设区间直觉模糊数  $\tilde{\alpha}_1 = ([a_1, b_1], [c_1, d_1]), \tilde{\alpha}_2 = ([a_2, b_2], [c_2, d_2]), \tilde{\alpha} = ([a, b], [c, d])$ . 则

$$(1) \tilde{\alpha}_1 \oplus \tilde{\alpha}_2 = ([a_1 + a_2 - a_1 a_2, b_1 + b_2 - b_1 b_2], [c_1 c_2, d_1 d_2]);$$

$$(2) \lambda \tilde{\alpha} = ([1 - (1 - a)^\lambda, 1 - (1 - b)^\lambda], [c^\lambda, d^\lambda]), \lambda > 0;$$

$$(3) \tilde{\alpha}^\lambda = ([a^\lambda, b^\lambda], [1 - (1 - c)^\lambda, 1 - (1 - d)^\lambda]), \lambda > 0.$$

**定义 1.4**<sup>[6]</sup> 设  $\tilde{\alpha}_j = ([a_j, b_j], [c_j, d_j]) (j = 1, 2, \dots, n)$  为一组区间直觉模糊数,且设 IIFWA:  $\tilde{\Theta}^n \rightarrow \tilde{\Theta}$ , 若

$$\text{IIFWA}_w(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) = w_1 \tilde{\alpha}_1 \oplus w_2 \tilde{\alpha}_2 \oplus \dots \oplus w_n \tilde{\alpha}_n = ([1 - \prod_{j=1}^n (1 - a_j)^{w_j}, 1 - \prod_{j=1}^n (1 - b_j)^{w_j}], [ \prod_{j=1}^n c_j^{w_j}, \prod_{j=1}^n d_j^{w_j} ]), \quad (1.1)$$

其中  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  为  $\tilde{\alpha}_j (j = 1, 2, \dots, n)$  的权重向量,且  $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \in [0, 1]$ , 则称 IIFWA 为区间直觉模糊数加权平均算子.

## 2 含决策者风险偏好参数的得分函数

对于区间直觉模糊数  $\tilde{\alpha} = ([a, b], [c, d])$ , 记  $\alpha(\lambda) = (m_\mu^\alpha(\lambda), m_\nu^\alpha(\lambda)), \alpha(\lambda)$  表示区间直觉模糊数  $\tilde{\alpha}$  对应的含参直觉模糊数,其中  $m_\mu^\alpha(\lambda) = a + \lambda(b - a), m_\nu^\alpha(\lambda) = c + (1 - \lambda)(d - c)$  分别表示区间直觉模糊数的含参数隶属度和含参非隶属度,而  $\lambda$  表示决策者的风险偏好系数且  $\lambda \in [0, 1]$ . 当  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$  时,决策者属于风险厌恶型;当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时,决策者属于风险中立

型;当  $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$  时,决策者属于风险冒险型。

对于直觉模糊数  $\alpha(\lambda) = (m_{\mu}^{\alpha}(\lambda), m_{\nu}^{\alpha}(\lambda))$ ,可以从投票模型中了解到,除投赞成票和反对票的人群外还有部分人群持犹豫态度.考虑到犹豫人群受投票人群的影响而选择投票,依据从众心理可将犹豫部分  $m_{\mu}^{\alpha}(\lambda) = 1 - m_{\mu}^{\alpha}(\lambda) - m_{\nu}^{\alpha}(\lambda)$  分割为  $m_{\mu}^{\alpha}(\lambda)m_{\pi}^{\alpha}(\lambda)$ ,  $m_{\nu}^{\alpha}(\lambda)m_{\pi}^{\alpha}(\lambda)$  和  $[m_{\pi}^{\alpha}(\lambda)]^2$  3 部分,分别表示犹豫人群中投赞成票、反对票和保持犹豫人数的比例,进而得到新的隶属度和非隶属度分别为  $\mu_{new}^{\alpha}(\lambda) = m_{\mu}^{\alpha}(\lambda) + m_{\mu}^{\alpha}(\lambda)m_{\pi}^{\alpha}(\lambda)$  和  $\nu_{new}^{\alpha}(\lambda) = m_{\nu}^{\alpha}(\lambda) + m_{\nu}^{\alpha}(\lambda)m_{\pi}^{\alpha}(\lambda)$ 。

基于上述对犹豫部分的分析,给出如下含决策者风险偏好参数的新得分函数:

**定义 2.1** 设  $\tilde{\alpha} = ([a, b], [c, d])$  是区间直觉模糊数,  $\lambda$  为决策者的风险偏好系数. 则称

$$S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) = m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) - m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) + (m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) - m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda))m_{\pi}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) \quad (2.1)$$

为区间直觉模糊数  $\tilde{\alpha}$  的得分函数. 其中  $m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = a + \lambda(b - a)$ ,  $m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = c + (1 - \lambda)(d - c)$ ,  $m_{\pi}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = 1 - m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) - m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ 。

若  $\lambda < \frac{1}{2}$  时,表示决策者属于风险厌恶型;若  $\lambda =$

$\frac{1}{2}$  时,决策者属于风险中立型;若  $\lambda > \frac{1}{2}$ ,表示决策者属于风险冒险型. 确定决策者风险偏好系数值,显然,以新得分函数作为排序区间直觉模糊数的新排序指标,得分值  $S_{\tilde{\alpha}}(\lambda)$  越大,对应的区间直觉模糊数  $\tilde{\alpha}$  越优。

将本文排序指标与现有的一些区间直觉模糊数的排序指标进行对比分析,结果如表 1 所示,对于  $\tilde{\alpha}_1$  和  $\tilde{\alpha}_2$ ,由方法 1 和 3 的排序指标得到的排序结果均为  $\tilde{\alpha}_1 \sim \tilde{\alpha}_2$ ,对应于本文排序指标中决策者风险偏好为中立的结果;由方法 2 和 4 的排序指标得到的排序结果为  $\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2$ ,对应于决策者风险偏好为冒险的结果;而由方法 5 的排序指标得到的排序结果为  $\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_2$ ,则与表 1 不同排序指标的排序结果比较

**Table 1 Comparison of ranking results by different methods**

算例 Example	方法 1 <sup>[5]</sup> Method 1	方法 2 <sup>[14]</sup> Method 2	方法 3 <sup>[15]</sup> Method 3	方法 4 <sup>[16]</sup> Method 4	方法 5 <sup>[18]</sup> Method 5	本文方法 Present method		
						$\lambda \in [0, \frac{1}{2})$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$
$\tilde{\alpha}_1 = ([0, 2, 0.3], [0.35, 0.45])$ $\tilde{\alpha}_2 = ([0, 1, 0.4], [0.3, 0.5])$	$\tilde{\alpha}_1 \sim \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 \sim \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 \sim \tilde{\alpha}_2$	$\tilde{\alpha}_1 < \tilde{\alpha}_2$
$\tilde{\alpha}_3 = ([0, 2, 0.3], [0.4, 0.5])$ $\tilde{\alpha}_4 = ([0, 2, 0.3], [0.3, 0.4])$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 > \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$	$\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$
$\tilde{\alpha}_5 = ([0, 5, 0.5], [0.2, 0.4])$ $\tilde{\alpha}_6 = ([0, 5, 0.5], [0.25, 0.35])$	$\tilde{\alpha}_5 \sim \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 < \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 \sim \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 \sim \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 < \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 < \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 \sim \tilde{\alpha}_6$	$\tilde{\alpha}_5 > \tilde{\alpha}_6$
$\tilde{\alpha}_7 = ([0, 0.4], [0, 0.4])$ $\tilde{\alpha}_8 = ([0, 0.5], [0, 0.5])$	$\tilde{\alpha}_7 < \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 < \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 < \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 < \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 \sim \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 > \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 \sim \tilde{\alpha}_8$	$\tilde{\alpha}_7 < \tilde{\alpha}_8$

决策者风险偏好为厌恶的结果相对应. 对于  $\tilde{\alpha}_3$  和  $\tilde{\alpha}_4$ ,显然有  $\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$ . 但采用文献[15]的排序指标得到的排序结果却为  $\tilde{\alpha}_3 > \tilde{\alpha}_4$ ,显然与实际不符;而采用文献[5, 14, 16, 18]及本文排序指标(无论  $\lambda$  在  $[0, 1]$  取何值)得到的结果均为  $\tilde{\alpha}_3 < \tilde{\alpha}_4$ ,与实际相符. 对于  $\tilde{\alpha}_5$  和  $\tilde{\alpha}_6$ ,采用文献[5, 15, 16]得到的排序结果为  $\tilde{\alpha}_5 \sim \tilde{\alpha}_6$ ,对应于本文排序指标中决策者风险偏好为中立的结果;而采用文献[14, 18]的排序指标得到的结果为  $\tilde{\alpha}_5 < \tilde{\alpha}_6$ ,对应于本文排序指标中决策者风险偏好为厌恶的结果;对于冒险型的决策者而言,会认为  $\tilde{\alpha}_5 > \tilde{\alpha}_6$ ,此对应于本文排序指标中决策者风险偏好为冒险的结果. 对于  $\tilde{\alpha}_7$  和  $\tilde{\alpha}_8$ ,采用文献[5, 14 ~ 16]的排序指标得到的结果均为  $\tilde{\alpha}_7 < \tilde{\alpha}_8$ ,采用文献[18]的排序指标得到  $\tilde{\alpha}_7 \sim \tilde{\alpha}_8$ . 上述两种排序结果分别对应于本文排序指标中的决策者的风险偏好为冒险型和 中立型的结果;对于风险厌恶型的决策者而言,  $\tilde{\alpha}_7$  将会优于  $\tilde{\alpha}_8$ ,此对应于本文排序指标中决策者风险偏好为厌恶型的结果。

总之表 1 的结果说明,新排序指标融入了决策者的风险偏好,在对区间直觉模糊数进行比较时,其排序体现不同的风险偏好,能提高决策者对排序结果的满意度。

**定理 2.1** 设有  $\tilde{\alpha}_1 = ([a_1, b_1], [c_1, d_1])$  和  $\tilde{\alpha}_2 = ([a_2, b_2], [c_2, d_2])$  两个区间直觉模糊数,若  $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2$ , 则有  $S_{\tilde{\alpha}_1}(\lambda) \leq S_{\tilde{\alpha}_2}(\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ 。

**证明** 因为  $m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = a + \lambda(b - a)$ ,  $m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = c + (1 - \lambda)(d - c)$ , 所以

$$\frac{\partial S_{\tilde{\alpha}}(\lambda, a, b, c, d)}{\partial a} = (1 - \lambda)(2 - 2m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda)), \quad (2.2)$$

又因为  $\lambda \in [0, 1]$ , 且  $0 \leq m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) \leq 1$ , 从而有  $(1 - \lambda)(2 - 2m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda)) \geq 0$ , 即  $\frac{\partial S_{\tilde{\alpha}}(\lambda, a, b, c, d)}{\partial a} \geq 0$ 。

同理可证

$$\frac{\partial S_{\tilde{\alpha}}(\lambda, a, b, c, d)}{\partial b} \geq 0, \frac{\partial S_{\tilde{\alpha}}(\lambda, a, b, c, d)}{\partial c} \leq 0,$$

$$\frac{\partial S_{\tilde{\alpha}}(\lambda, a, b, c, d)}{\partial d} \leq 0.$$

因此  $S_{\tilde{\alpha}}(\lambda)$  关于变量  $a, b$  单调递增, 关于变量  $c, d$  单调递减. 所以当  $\tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\alpha}_2$  时,  $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$  且  $c_1 \geq c_2, d_1 \geq d_2$ , 从而  $S_{\tilde{\alpha}_1}(\lambda) \leq S_{\tilde{\alpha}_2}(\lambda)$ .

**定理 2.2** 设  $\tilde{\alpha} = ([a, b], [c, d])$  为任意一个区间直觉模糊数,  $S_{\tilde{\alpha}}(\lambda)$  为  $\tilde{\alpha} = ([a, b], [c, d])$  的得分值. 则有以下性质:

- (1)  $\tilde{\alpha} = ([1, 1], [0, 0]) \Leftrightarrow \forall \lambda \in [0, 1], S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) = 1$ ;
- (2)  $\tilde{\alpha} = ([0, 0], [1, 1]) \Leftrightarrow \forall \lambda \in [0, 1], S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) = -1$ ;
- (3)  $-1 \leq S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) \leq 1, \forall \lambda \in [0, 1]$ .

**证明** (1) 必要性. 若  $\tilde{\alpha} = ([1, 1], [0, 0])$  时, 显然有  $\forall \lambda \in [0, 1], S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) = 1$ .

充分性. 将  $m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = a + \lambda(b - a), m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = c + (1 - \lambda)(d - c), m_{\pi}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) = 1 - m_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda) - m_{\nu}^{\tilde{\alpha}}(\lambda)$  代入(2.1)式, 由于  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , 恒有  $S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) = 1$  成立, 因此可得到如下方程:

$$\begin{cases} (a - d)(2 - a - d) = 1, \\ (b + d - a - c)(2 - a - d) + (a - d)(d + a - b - c) = 0, \\ (b + d - a - c)(d + a - b - c) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

化简(2.3)式, 得 
$$\begin{cases} (a - 1)^2 = d^2 - 2d, \\ a = b, \\ c = d. \end{cases} \quad (2.4)$$

因为  $a, b, c, d \in [0, 1]$ , 所以  $(a - 1)^2 \geq 0, d^2 - 2d \leq 0$ . 因此有  $(a - 1)^2 = d^2 - 2d = 0$ , 即  $\begin{cases} a = 1 \\ d = 0 \end{cases}$ , 故所求结果

为  $\begin{cases} a = b = 1 \\ c = d = 0 \end{cases}$ , 因此  $\tilde{\alpha} = ([1, 1], [0, 0])$ .

(2) 类似(1)可证.

(3) 根据定理 2.1 得分函数  $S_{\tilde{\alpha}}(\lambda)$  的单调性及性质(1)和(2)可知,  $-1 \leq S_{\tilde{\alpha}}(\lambda) \leq 1, \forall \lambda \in [0, 1]$ .

### 3 基于新得分函数的区间直觉模糊多属性决策方法

对于某一区间直觉模糊数的多属性决策问题, 设  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  为方案集,  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  为属性集, 方案  $A_i$  关于属性  $C_j$  的属性值为区间直觉模糊数  $\tilde{\alpha}_{ij} = ([a_{ij}, b_{ij}], [c_{ij}, d_{ij}]) (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ , 则可得到区间直觉模糊决策矩阵  $\tilde{R} =$

$[\tilde{\alpha}_{ij}]_{n \times m}$ . 决策方法的具体步骤如下:

步骤 1 由决策者给出区间直觉模糊决策矩阵  $\tilde{R} = [\tilde{\alpha}_{ij}]_{n \times m}$ , 属性权重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)^T$  及决策者的风险偏好值  $\lambda$ .

步骤 2 利用(1.1)式计算方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的综合属性区间直觉模糊数  $\tilde{A}_i = \omega_1 \tilde{\alpha}_{i1} \oplus \omega_2 \tilde{\alpha}_{i2} \oplus \dots \oplus \omega_m \tilde{\alpha}_{im} = ([a_i, b_i], [c_i, d_i])$ .

步骤 3 利用公式  $m_{\mu}^{\tilde{A}_i}(\lambda) = a_i + \lambda(b_i - a_i), m_{\nu}^{\tilde{A}_i}(\lambda) = c_i + (1 - \lambda)(d_i - c_i)$  将综合属性区间直觉模糊数  $\tilde{A}_i$  转化为直觉模糊数  $A_i(\lambda) = [m_{\mu}^{\tilde{A}_i}(\lambda), m_{\nu}^{\tilde{A}_i}(\lambda)]$ .

步骤 4 利用(2.1)式计算方案  $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的得分值  $S_{\tilde{A}_i}(\lambda)$ , 并依据得分值的大小对方案进行排序择优.

### 4 实例分析

某单位选取优秀干部, 需对候选干部进行考核. 该单位首先制定了 6 项考核指标(属性): 思想品德( $C_1$ )、工作态度( $C_2$ )、工作作风( $C_3$ )、文化水平和知识结构( $C_4$ )、领导能力( $C_5$ )、开拓能力( $C_6$ ). 该 6 项指标的权重值向量为  $\omega = (0.2, 0.10, 0.25, 0.10, 0.15, 0.20)$ . 进而由群众推荐、评议, 对各候选人按上述 6 项指标进行评估, 再进行统计处理, 从中确定 5 位候选人  $A_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ . 假设每位候选人在各指标下的评估信息经过统计处理后, 可表示为区间直觉模糊数矩阵  $\tilde{R}$ .

根据本文方法选择最佳候选人:

步骤 1 给出决策矩阵  $\tilde{R}$  及权重值向量  $\omega = (0.2, 0.10, 0.25, 0.10, 0.15, 0.20)^T, \lambda = 1$ , 矩阵  $\tilde{R}$  如表 2 所示;

步骤 2 利用(1.1)式计算每个候选人的综合属性区间直觉模糊数, 结果如下:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= ([0.4165, 0.5597], [0.2459, 0.3804]), \\ \tilde{A}_2 &= ([0.5176, 0.6576], [0.1739, 0.2947]), \tilde{A}_3 = ([0.4703, 0.59], [0.1933, 0.3424]), \tilde{A}_4 = \\ &= ([0.6070, 0.7203], [0, 0.24]), \tilde{A}_5 = ([0.5375, 0.6730], [0.1634, 0.3211]); \end{aligned}$$

步骤 3 利用公式  $m_{\mu}^{\tilde{A}_i}(\lambda) = a_i + \lambda(b_i - a_i), m_{\nu}^{\tilde{A}_i}(\lambda) = c_i + (1 - \lambda)(d_i - c_i)$  将综合属性区间直觉模糊数  $\tilde{A}_i$  转化为直觉模糊数  $A_i(\lambda) = [m_{\mu}^{\tilde{A}_i}(\lambda), m_{\nu}^{\tilde{A}_i}(\lambda)], i = 1, 2, \dots, 5$ .

$$\begin{aligned} A_1(\lambda = 1) &= [0.5597, 0.2459], A_2(\lambda = 1) = [0.6576, 0.1739], A_3(\lambda = 1) = [0.59, 0.1933], \\ A_4(\lambda = 1) &= [0.7203, 0], A_5(\lambda = 1) = [0.6730, 0.1634]; \end{aligned}$$

表 2 决策矩阵  $\tilde{R}$

Table 2 Decision matrix  $\tilde{R}$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$
$A_1$	$([0.2, 0.3], [0.4, 0.5])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.4, 0.5], [0.2, 0.4])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.1, 0.3], [0.5, 0.6])$	$([0.5, 0.7], [0.2, 0.3])$
$A_2$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.5, 0.6], [0.1, 0.3])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.6, 0.7], [0.1, 0.2])$	$([0.3, 0.4], [0.5, 0.6])$	$([0.4, 0.7], [0.1, 0.2])$
$A_3$	$([0.4, 0.5], [0.3, 0.4])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.5, 0.6], [0.3, 0.4])$	$([0.6, 0.7], [0.1, 0.3])$	$([0.4, 0.5], [0.3, 0.4])$	$([0.3, 0.5], [0.1, 0.3])$
$A_4$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.5, 0.7], [0.1, 0.3])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.3, 0.4], [0.1, 0.2])$	$([0.5, 0.6], [0, 0.3])$	$([0.7, 0.8], [0.1, 0.2])$
$A_5$	$([0.5, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.3, 0.4], [0.3, 0.5])$	$([0.6, 0.7], [0.1, 0.3])$	$([0.6, 0.8], [0.1, 0.2])$	$([0.6, 0.7], [0.2, 0.3])$	$([0.5, 0.6], [0.2, 0.4])$

步骤 4 利用(2.1)式计算方案  $A_i (i=1, 2, \dots, 5)$  的得分值  $S_{\tilde{A}_i} (\lambda=1)$ , 并对方案进行排序择优.

$$S_{\tilde{A}_1} (\lambda=1) = 0.3748, S_{\tilde{A}_2} (\lambda=1) = 0.5652, S_{\tilde{A}_3} (\lambda=1) = 0.4827, S_{\tilde{A}_4} (\lambda=1) = 0.9218, S_{\tilde{A}_5} (\lambda=1) = 0.5930;$$

得排序结果  $A_4 > A_5 > A_2 > A_3 > A_1$ , 所以最优方案为  $A_4$ .

对  $\tilde{A}_i (i=1, 2, 3, 4)$  的隶属度区间和非隶属度区间比较, 由定义 2.2 有  $\tilde{A}_4 > \tilde{A}_5 (\tilde{A}_2) > \tilde{A}_3 > \tilde{A}_1$ , 因此, 对应方案的排序为  $A_4 > A_5 (A_2) > A_3 > A_1$ . 表 3 结果表明, 文献[5, 14, 16, 18]及本文方法(无论  $\lambda$  在  $[0, 1]$  取何值)的排序结果一致. 采用文献[15]方法排序出现  $A_5 > A_4$ , 与实际不符. 而  $\tilde{A}_2 = ([0.5176, 0.6576], [0.1739, 0.2947])$  与  $\tilde{A}_5 = ([0.5375, 0.6730], [0.1634, 0.3211])$  比较可知,  $\tilde{A}_5$  的隶属度区间优于  $\tilde{A}_2$  的隶属度区间, 且  $\tilde{A}_5$  的非隶属度区间左端点优于  $\tilde{A}_2$  的非隶属度区间左端点. 因此, 不是十分厌恶风险的决策者都认为  $A_5 > A_2$ , 而本文排序方法能较好反映此情况.

表 3 不同排序指标的排序结果

Table 3 Ranking results of different methods

文献 Réfereuce	排序结果 Raouking results
文献 Réfereuce[5]	$A_4 > A_5 > A_2 > A_3 > A_1$
文献 Réfereuce[15]	$A_5 > A_4 > A_2 > A_3 > A_1$
文献 Réfereuce[16]	$A_4 > A_5 > A_2 > A_3 > A_1$
文献 Réfereuce[18]	$A_4 > A_2 > A_5 > A_3 > A_1$
本文方法 This method	$A_4 > A_2 > A_5 > A_3 > A_1 (\lambda=0)$
	$A_4 > A_5 > A_2 > A_3 > A_1 (\lambda=1/2)$
	$A_4 > A_5 > A_2 > A_3 > A_1 (\lambda=1)$

一般地, 对于同一个决策问题, 不同决策者可能

因其风险偏好不同而导致决策的结果不同, 本文方法遵循了这一原则. 实例结果说明新排序指标能够克服现有方法的一些不足, 基于新排序指标的模糊多属性决策方法不但可行还具备一定的灵活性.

参考文献:

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Zadeh L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[3] Atanassov K, Gargov G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[4] Atanassov K. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(2): 159-174.

[5] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策, 2007, 22(2): 215-219. Xu Z S. Methods for aggregating interval-valued intuitionistic fuzzy information and their application to decision making[J]. Control and Decision, 2007, 22(2): 215-219.

[6] Xu Z S, Chen J. Approach to group decision making based on interval-valued intuitionistic fuzzy judgment matrices[J]. Systems Engineer-Theory and Practice, 2007, 27(4): 126-133.

[7] 刘华文. 多目标模糊决策的 Vague 集[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 5: 103-109. Liu H W. Vague set methods of multi-criteria fuzzy decision making[J]. Systems Engineer-Theory and Practice, 2004, 5: 103-109.

[8] Lin Z G, Xu Z L, Wang J Y. Multicriteria fusion decision-making method based on vague set[J]. Computer Engineering, 2005, 31(5): 1-13.

[9] Wang J, Zhang J, Liu S Y. A new score of function for

- fuzzy MCDM based on vague set theory[J]. International Journal of Computational Cognition, 2006, 4: 44-48.
- [10] Lin L Y, Yuan X H, Xia Z Q. Multi-criteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2007, 73: 84-88.
- [11] Ye J. Using an improved measure function of vague sets for multicriteria fuzzy decision-making[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37: 4706-4709.
- [12] 王中兴, 唐芝兰, 邵翠丽. 基于相对优势度的直觉模糊多属性决策方法[J]. 广西科学, 2012, 19(3): 205-208.  
Wang Z X, Tang Z L, Shao C L. Multi-attribute fuzzy decision-making method with intuitionistic fuzzy sets based on relative superiority[J]. Guangxi Sciences, 2012, 19(3): 205-208.
- [13] 牛利利, 罗雪鹏, 黄娜. 基于决策者风险态度的直觉模糊多属性决策方法[J]. 广西科学, 2013, 20(1): 12-16.  
Niu L L, Luo X P, Huang N. Multi-criteria decision-making method based on risk attitude under intuitionistic fuzzy environment[J]. Guangxi Sciences, 2013, 20(1): 12-16.
- [14] Wang Z J, Kevin W, Li Dr, et al. An approach to multi-attribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy assessments and incomplete weights[J]. Information Sciences, 2009, 179(17): 3026-3040.
- [15] Ye J. Multicriteria fuzzy decision-making method based on a novel accuracy function under interval-valued intuitionistic fuzzy environment [J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36: 6899-6902.
- [16] Lakshmana Gomathi Nayagam V, Muralikrishnan S, Sivaraman G. Multi-criteria decision-making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. Expert System with Applications, 2011, 38: 1464-1467.
- [17] 谢海斌, 王中兴, 唐芝兰. 信息不完全确定的区间直觉模糊多属性决策方法[J]. 广西科学, 2011, 18(3): 218-221.  
Xie H B, Wang Z X, Tang Z L. A Method of multi-criteria decision-making based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets with incomplete certain information [J]. Guangxi Sciences, 2011, 18(3): 218-221.
- [18] 谢海斌, 王中兴, 谢国榕, 等. 基于精确函数的区间直觉模糊多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(22): 182-188.  
Xie H B, Wang Z X, Xie G R, et al. Multi-attribute fuzzy decision-making method with interval-valued intuitionistic fuzzy sets based on a novel accuracy function [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2012, 42(22): 192-198.
- [19] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal of General Systems, 2006, 35: 417-433.

(责任编辑:尹 闯)

(上接第 172 页 Continue from page 172)

- [5] 广西海洋局. 广西海洋事业发展规划纲要(2011-2015年)[EB/OL]. <http://www.gxoa.gov.cn/NewsView.aspx?id=5136>, 2012-08-24.  
The Oceanic Administration of Guangxi. The development of guangxi marine programs (2011-2015) [EB/OL]. <http://www.gxoa.gov.cn/NewsView.aspx?id=5136>, 2012-08-24.
- [6] 广西海洋局. 广西壮族自治区海洋经济发展“十二五”规划[EB/OL]. <http://www.gxoa.gov.cn/NewsView.aspx?id=5484>, 2013-10-12.  
The Oceanic Administration of Guangxi. The twelfth five-Year plan of marine economic development of the Guangxi Zhuang Autonomous Region [EB/OL]. <http://www.gxoa.gov.cn/NewsView.aspx?id=5484>, 2013-10-12.
- [7] 中国科技网. 2012 年全国科技经费投入统计公报[EB/OL]. <http://www.gxsti.net/dtxx/szyw/676784.shtml>, 2013-09-26.  
CSTNET. 2012 statistical bulletin of national science and technology funding [EB/OL]. <http://www.gxsti.net/dtxx/szyw/676784.shtml>, 2013-09-26.
- [8] 徐有海, 陆宇明. 广西县(市)科技工作现状与发展建议[J]. 南方农业学报, 2012, 43(8): 1252-1256.  
Xu Y H, Lu Y M. Status quo of science and technology work in counties (cities) of Guangxi and its developmental proposals [J]. Journal of Southern Agriculture, 2012, 43(8): 1252-1256.
- [9] 赖俊翔, 姜发军, 许铭本, 等. 广西近海海洋生态系统服务功能价值评估[J]. 广西科学院学报, 2013, 29(4): 252-258.  
Lai J X, Jiang F J, Xu M B, et al. Value assessment of off shore marine ecosystem service in Guangxi [J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences, 2013, 29(4): 252-258.

(责任编辑:尹 闯)