网络优先数字出版时间:2014-4-18
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140418.002.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(2):179～182

含参数积型模糊一致性互补判断矩阵元素与其权重的逻辑关系*

Logical Relation of the Elements in Multiplicative Fuzzy Consistent Complementary Judgment Matrix with the Priorities

兰继斌,杨英芝,严丹丹,王中兴
LAN Ji-bin,YANG Ying-zhi,YAN Dan-dan,WANG Zhong-xing

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(School Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:推导出一种含参数的积型模糊一致性互补判断矩阵元素与其优先权重的逻辑关系,并提出利用该逻辑关系求解优先权重的方法.对参数的含义作出了解释,并通过算例说明此方法的有效性.

关键词:模糊互补判断矩阵 优先权重 积型一致性

中图分类号:C923,O223 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2014)02-0179-04

Abstract:The logical relation of the elements in multiplicative fuzzy consistent complementary judgment matrix with the priorities is deduced in this paper. The logical relation is used to generate the priority weight and he meaning of the parameter is explained. Finally,a numerical example is used to illustrate the validity of the method.

Key words:fuzzy complementary judgment matrix,priority weight,multiplicative consistency

层次分析法[1]是一种定性与定量相结合的多目标系统决策方法.随着研究的不断深入,模糊理论、不确定思想等被引入到层次分析法中,从而形成了模糊层次分析的理论与方法.在模糊层次分析法中,决策者对于因素(属性或方案)的偏好信息通常以判断矩阵的形式给出.判断矩阵中元素有不同的表示方式,所以判断矩阵可分为互反判断矩阵和模糊互补判断矩阵.由于在模糊互补判断矩阵的研究中,方案优先权重的计算尤为重要,所以国内许多学者都想对这个问题进行探讨.其中文献[2]总结了多种求解权重的方法;文献[3]利用加型模糊一致性互补判断矩阵元素与其权重的逻辑关系,研究方案的优先权重;文献[4]利用互反判断矩阵元素与其优先权重的逻辑关系,求解互反判断矩阵的优先权重.本文给出一种含参数的积型模糊一致性互补判断矩阵元素与其权重的逻辑关系,并利用该关系求解方案的优先权重.

1 基本概念

若备选方案集为 $P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$,$N=\{1,2,\cdots,n\}$,那么决策者依据某准则 C 对 P 中的方案两两进行重要性比较,构造的模糊互补判断矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 $0\leqslant b_{ij}\leqslant 1$,$b_{ij}+b_{ji}=1$,$b_{ii}=0.5$,$\forall i,j\in N$.当 $b_{ij}<0.5$ 时,表示方案 P_j 比方案 P_i 重要;当 $b_{ij}=0.5$

收稿日期:2013-01-07
修回日期:2013-05-10
作者简介:兰继斌(1962-),男,教授,主要从事优化与决策研究。
*国家自然科学基金项目(70861001);广西大学科研基金项目(X071106)资助。

时，表示方案 P_i 与方案 P_j 同等重要；当 $b_{ij} > 0.5$ 时，表示方案 P_i 比方案 P_j 重要，且 b_{ij} 越大，表示方案 P_i 比方案 P_j 越重要.

定义 1[5] 设模糊判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，若

$$b_{ik}b_{kj}b_{ji}=b_{ki}b_{jk}b_{ij}, \forall i,j,k\in N, \tag{1}$$

则称矩阵 B 为积型模糊一致性互补判断矩阵.

2 主要结果

引理 1 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是模糊互补判断矩阵，则

$$\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})\leqslant 1. \tag{2}$$

证明 （反证法）假设(2)式不成立，即 $\forall i,j\in N$，$\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}>1$，所以 $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}>1$. 这与 $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}=1$ 相互矛盾. 所以引理 1 成立.

定理 1 设模糊互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 B 是积型模糊一致性互补判断矩阵的充分必要条件是，存在 n 维正的归一化向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，使得

$$b_{ij}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}, i,j\in N, \tag{3}$$

其中 $\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})$.

证明 （必要性）设 $\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})$，

$$w_i=\log_\beta(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}, i\in N. \tag{4}$$

因为 $\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})$，由引理 1 可得 $\beta>1$. 则有

$$1>\log_\beta(1/(\min_{i\in N}\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}))=$$

$$-\log_\beta(\min_{i\in N}\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})\Rightarrow\log_\beta(\min_{i\in N}\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})>-1,$$

$$w_i=\frac{1}{n}\log_\beta\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{n}\log_\beta(\min_{i\in N}\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}})+\frac{1}{n}>0,$$

即 $w_i>0, i\in N$.

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=\sum_{i=1}^{n}(\log_\beta\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{b_{ji}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\log_\beta(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}))+1=1.$$

因为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 具有积型模糊一致性，即 $\frac{b_{ji}}{b_{ij}}=\frac{b_{ki}b_{jk}}{b_{ik}b_{kj}}, \forall i,j,k\in N$，所以

$$w_j-w_i=\log_\beta\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{jk}}{b_{kj}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-(\log_\beta\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{ik}}{b_{ki}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})=\log_\beta\frac{1-b_{ij}}{b_{ij}}, \tag{5}$$

$$\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}=\frac{1}{1+\beta^{w_j-w_i}}=\frac{1}{1+\beta^{\log_\beta\frac{1-b_{ij}}{b_{ij}}}}=\frac{1}{1+\frac{1-b_{ij}}{b_{ij}}}=b_{ij},$$

即 $b_{ij}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}, i,j\in N$.

（充分性）若模糊互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 的元素 $b_{ij}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}$，则有

$$b_{ik}b_{kj}b_{ji}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_k}}\cdot\frac{\beta^{w_k}}{\beta^{w_k}+\beta^{w_j}}\cdot\frac{\beta^{w_j}}{\beta^{w_j}+\beta^{w_i}}=\frac{\beta^{w_k}}{\beta^{w_k}+\beta^{w_i}}\cdot\frac{\beta^{w_j}}{\beta^{w_j}+\beta^{w_k}}\cdot\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}=b_{ki}b_{jk}b_{ij},$$

所以 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵.

设模糊互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊一致性互补判断矩阵，那么由定理 1 可知：

$$w_i>w_j\Leftrightarrow b_{ij}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}>0.5, \forall i,j\in N,$$

$$w_i=w_j\Leftrightarrow b_{ij}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}=0.5, \forall i,j\in N,$$

$$w_i<w_j\Leftrightarrow b_{ij}=\frac{\beta^{w_i}}{\beta^{w_i}+\beta^{w_j}}<0.5, \forall i,j\in N.$$

这说明选择 $w_i(i\in N)$ 作为衡量方案的优先权重是合理的.

如果 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊互补判断矩阵，我们还可以利用(5)式确定各方案的权重.

引理 2 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是积型模糊互补判断矩阵，则可通过下面的优化模型确定方案的优先权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$. 若

$$(\mathrm{M1})\begin{cases}\min z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(w_j-w_i-\log_\beta\frac{1-b_{ij}}{b_{ij}})^2, \\ \mathrm{s.t}\quad \sum_{i=1}^{n}w_i=1, w_i>0, i\in N,\end{cases} \tag{6}$$

则有

$$w_i=\log_\beta\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}, i\in N,$$

其中 $\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})$.

证明 用拉格朗日乘子法将(M1)转化为无约束规划问题：

(M2) $\min L(w,\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(w_j-w_i-\log_\beta\frac{1-b_{ij}}{b_{ij}})^2+4\xi(\sum_{i=1}^{n}w_i-1)=0.$

令 $\frac{\partial L(w,\xi)}{\partial w_i}=0$，得

$$4\sum_{j=1}^{n}(w_i-w_j-\log_\beta\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})+4\xi=0,$$

整理得

$$\sum_{j=1}^{n}(w_i-w_j-\log_\beta\frac{b_{ij}}{b_{ji}})+\xi=0, \tag{7}$$

两边同时对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(w_i-w_j-\log_\beta\frac{b_{ij}}{b_{ji}})+\sum_{i=1}^{n}\xi=0.$$

因为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(w_i-w_j-\log_\beta\frac{b_{ij}}{b_{ji}})=0$，可得 $\xi=0$. 再求解方程组：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}(w_i-w_j-\log_\beta\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})=0,\\ \text{s.t}\quad \sum_{i=1}^{n}w_i=1,w_i>0,i\in N,\beta>1.\end{cases} \tag{8}$$

由 $\sum_{j=1}^{n}(w_i-w_j-\log_\beta\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})=0\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}w_i-\sum_{j=1}^{n}w_j-\log\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}=0\Rightarrow nw_i-1-\log\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}=0\Rightarrow w_i=\log\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}$，

即 $w_i=\log_\beta\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n},i\in N$.

引理 2 给出一种判断模糊判断矩阵 B 是否具有积型一致性的方法. 在模型(M1)中，如果 $z=0$，则模糊判断矩阵 B 具有积型一致性，否则 B 不具有积型一致性. 当 B 不具有积型一致性时，可根据文献[6～9]提出的校正一致性的方法，对模糊互补判断矩阵 B 的元素进行适当调整，使判断矩阵 B 逐步达到满意的积型一致性.

由上述分析可以得出以下结论：

结论 1 对于积型模糊一致性互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，方案的序关系与参数 $\beta(\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}))$ 无关，只与其对应的积($\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}$)有关.

证明 对于 $\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}),\forall i,j\in N$，有

$$w_i(\beta)-w_j(\beta)=(\log_\beta\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})-(\log_\beta\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n})=\log_\beta(\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}})^{\frac{1}{n}}/\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}})^{\frac{1}{n}}).$$

因为 $\beta>1$，所以

$$w_i(\beta)>w_j(\beta)\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}})^{\frac{1}{n}}/\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}})^{\frac{1}{n}}>1\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{n}\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}}>\prod_{k=1}^{n}\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}},$$

即 $w_i(\beta)>w_j(\beta)$ 时，$\prod_{k=1}^{n}\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}}>\prod_{k=1}^{n}\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}}$.

结论 2 由于优先权重 $w_i=\log_\beta\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}(i\in N)$ 是关于参数 $\beta(\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}))$ 的函数，因而对于积型模糊一致性互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 有一系列权重：

$$W=\{(w_1(\beta),w_2(\beta),\cdots,w_n(\beta))^{\mathrm{T}}|w_i(\beta)=\log_\beta\prod_{j=1}^{n}(\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}})^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n},\beta>1/\min_{i\in N}(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{1-b_{ij}}),i\in N\}.$$

结论 3 设 $w_i(\beta)>w_j(\beta)$，则

$$w_i(\beta)-w_j(\beta)=\log_\beta(\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}})^{\frac{1}{n}}/\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}})^{\frac{1}{n}})>0.$$

由结论 1 可得 $\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{ik}}{1-b_{ik}})>\prod_{k=1}^{n}(\frac{b_{jk}}{1-b_{jk}})$. 而 $w_i(\beta)-w_j(\beta)$ 是关于 β 的严格递减函数，且 $\lim_{\beta\to\infty}(w_i(\beta)-w_j(\beta))=0$，说明随着 β 的增大，方案之间的优劣程度逐渐减小. 为了得到比较清晰的方案间的排序，应该选择较小的 β 值.

结论 4 由积型模糊一致性互补判断矩阵来表示决策者的偏好，信息是不完善的. 即使模糊互补判断矩阵具有一致性，而只能确定方案的序关系，不能确定方案权重的大小. 要确定方案的优先权重，必须考虑参数 β 的选择. 这是由于模糊互补判断矩阵具有一致性，它对应的权重矢量不是唯一的，而是一系列权重矢量.

3 算例

例 1[9] 设一个决策者针对决策方案集 $P=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$ 提供的模糊判断矩阵为

$$B_1=\begin{bmatrix}0.5&0.1&0.6&0.7\\0.9&0.5&0.8&0.4\\0.4&0.2&0.5&0.9\\0.3&0.6&0.1&0.5\end{bmatrix}.$$

因为 $b_{12}b_{24}b_{41} \neq b_{21}b_{42}b_{14}$，由定义 1 可知 B_1 不具有积型一致性. 利用文献[9]的校正方法构造和分析模糊判断矩阵 B_1 的调和矩阵，逐步将模糊判定矩阵改进为具有满意一致性的矩阵 B_2

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.55 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 0.45 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

利用(4)式计算判断矩阵的权重. 由定理 1，计算得 $\beta > 25.641$. 再分别取 $\beta = 26$，$\beta = 81$，$\beta = 10^{100}$，则

$$w(26) = (0.1775, 0.5404, 0.2189, 0.0011)^{\mathrm{T}},$$
$$w(81) = (0.1963, 0.4653, 0.2269, 0.0654)^{\mathrm{T}},$$
$$w(10^{100}) = (0.2490, 0.2541, 0.2496, 0.2465)^{\mathrm{T}}.$$

计算结果说明结论 2 与结论 3 是成立的. 优先权重 w_i 随着参数 β 的变动，产生关于积型模糊一致性互补判断矩阵的一系列权重；$w_i(\beta) - w_j(\beta)$ 是关于 β 的严格递减函数，当 β 的值增大时，方案间的差异逐渐变小.

参考文献：

[1] 许树柏. 层次分析法原理[M]. 天津：天津大学出版社，1988.
Xu S B. Analytic hierarchy process principle[M]. Tianjin：Tianjin University Press，1988.

[2] 王应明. 判断矩阵排序方法综述[J]. 决策与决策支持系统，1995，5(3)：101-114.
Wang Y M. An overview of priority methods of comparison matrix[J]. Journal of Decision Making and Decision Support Systems，1995，5(3)：101-114.

[3] 兰继斌，徐扬. 模糊层次分析法权重研究[J]. 系统工程理论与实践，2006，6：107-112.
Lan J B，Xu Y. Research on the priorities of fuzzy analytical hierarchy process[J]. Systems Enginerring-theory & Practice，2006，9(9)：107-112.

[4] 兰继斌，乐琦. 正互反判断矩阵元素与优先权重新的逻辑关系[J]. 数学的实践与认识，2008，38(7)：128-133.
Lan J B，Yue Q. A new logic relation of elements in positive reciprocal judgment matrix with priorities[J]. Mathematics in Practice and Theory，2008，38(7)：128-133.

[5] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems，1984(12)：117-131.

[6] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社，2004.
Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and applications[M]. Beijing：Tsinghua University Press，2004.

[7] 宋光兴，杨德礼. 模糊判断矩阵的一致性检验及一致性改进方法[J]. 系统工程，2003，21(1)：110-116.
Song G X，Yang D L. Methods for identifying and improving the consistency of fuzzy judgment matrix[J]. Systems Engineering，2003，21(1)：110-116.

[8] 徐改丽，林亮. 基于模糊互补判断矩阵的一致性调整新方法[J]. 运筹与管理，2011，2(1)：93-97.
Xu G L，Lin L. Methods for identifying and improving the consistency of fuzzy complementary judgment matrix[J]. Operations Research and Management Science，2011，2(1)：93-97

[9] 姜艳萍，樊治平. 一种校正模糊判断矩阵一致性的新方法[J]. 模糊系统与数学，2002，16(2)：74-78.
Jiang Y P，Fan Z P. A method for Improving the consistency of fuzzy judgment matrix[J]. Fuzzy Systems and Mathematics，2002，16(2)：74-78.

(责任编辑：尹　闯)