网络优先数字出版时间:2014-3-27
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140327.003.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(2):187～191

缺陷品率可控的非完美质量产品联合库存模型*

An Integrated Inventory Model for Imperfect Products with Controllable Defective Rate

莫降涛,梁　丽,李　霞
MO Jiang-tao,LIANG Li,LI Xia

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004)
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004,China)

摘要:在供应链环境下,研究一类不完美质量产品的联合库存问题:供应商的产品的缺陷品率可以通过投资改变,产品由零售商进行检验,缺陷品返回供应商.以优化供应链的总成本为目标函数,建立联合库存模型,给出模型最优解的理论结果,并运用数值方法对模型的主要参数进行灵敏度分析.

关键词:缺陷品率　库存　联合模型
中图分类号:O227　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2014)02-0187-05

Abstract:In this paper, an integrated inventory problem for the product with imperfect quality is studied under the environment of the supply chain. The defective rate of the product can be changed through investments by supplier. The product was inspected by the retailer, and all defective products were returned to the supplier when the inspected process ended. An integrated inventory model was developed to optimize the total cost of the supply chain. The theoretical results for optimal solution of the model were given through analysis. Sensitivity analysis of the main parameters was carried out through the numerical method.

Key words:defective rate, inventory, integrated model

经典的经济订购批量(EOQ)和经济生产批量(EPQ)模型均假设收到的产品质量是完美的,即产品不含缺陷品,均可用于销售.而实际上,由于生产过程不完美,或运输和存储等环节的影响,部分产品在质量或外观方面会有缺陷,不能用于销售,需要退回供应商或降价处理.缺陷品的存在不仅产生了处理费用,还有可能影响顾客的需求.因此,研究非完美质量产品的生产、订购和存储问题具有重要的现实意义.

Salameh 等[1]首先建立缺陷品率是随机变量的非完美质量产品的经济批量模型.随后一些学者对其进行了改进和推广,例如,Goyal 等[2]改进成本的计算方法;Maddah 等[3]改用更新定理计算期望利润;Wee 等[4]将其推广到允许缺货的情形;Chung 等[5]建立基于信用支付的经济批量模型;Li 等[6]研究基于信用支付且允许缺货的最优订购策略;Ouyang 等[7]建立信用期依赖于订购量的经济批量模型;Lin[8]研究供应商提供数量折扣的经济批量问题;莫降涛等[9]在允许延期支付下建立了需求与价格相关的经济批量模型.值得注意的是:上述文献都是从供应商或者零售商单方面的优化成本或利润,供应链的成本或利润常常达不到最佳状态.另外一些学者从供应链的角度优化生产和订货批量,使供应链的成本或利润得到优化.例如,Huang[10]建立多次订购的联合经济批量模型;Lo 等[11]研究通货膨胀的情形下缺陷品率服从 Weibull 分布的联合库存订购策略;Lin 等[12]建立需求依赖于信用期的联合库存模型;而 So-

收稿日期:2013-07-15
修回日期:2013-09-15
作者简介:莫降涛(1963-),男,博士,教授,主要从事供应链管理与优化,运筹学理论及其应用研究。
*国家自然科学基金项目(No:71261002,11161003)资助。

ni 等[13]研究需求依赖于价格的联合库存问题，给出最优定价和补货策略. 最近，张新艳[14]研究非完美质量产品的联合库存问题，其中供应商生产的产品含有缺陷品，在生产结束后，供应商对产品进行检查，将合格品卖给零售商，缺陷品则报废处理；通过投资（如设备的更新，对员工的技能培训，技术改进等），缺陷品率可以降低；以优化由供应商生产成本和投资机会成本、零售商的订购成本、库存持有成本组成的联合成本为目标，确定了供应商的最优缺陷品率和零售商的订购批量.

在现实中，一些产品的质量由零售商进行检验，即零售商收到订购的产品后，对产品进行全面的检验，检查结束后立即将所有缺陷品一次性返还给供应商或降价处理[1~6]. 基于以上分析，本文建立了一类非完美质量产品的联合库存模型，其中供应商的产品的缺陷品率可以通过投资改变，零售商收到产品后立即进行检查，检查完后，将所有缺陷品返回供应商. 目的是确定供应商的最优缺陷品率和零售商的最优订购批量，使供应链的总成本达到最优. 得到模型最优解的理论结果，并进行了数值验证，最后对主要参数进行灵敏度分析.

1 模型建立

1.1 假设和记号

为了建立库存模型，采用以下假设：(a)库存系统由 1 个零售商，1 个供应商和 1 种产品组成；(b)供应商以速率 R 生产产品，产品的质量不完美，即包含合格品和缺陷品，其中一个批次的产品中缺陷品率为 r（决策变量）；(c)供应商将缺陷品率从 r_0 改变成 r 所产生的费用为 $\varphi(r)=\delta\ln(r_0/r)$，$0<r\leqslant r_0<1$，其中 δ 是缺陷品率降低一个百分比所需的投资成本；(d)不允许缺货，供应商的生产速率 R 大于零售商的需求率 d；(e)零售商从供应商订购产品，产品到达后，再以速率 x 检查所有的货物，$x\geqslant d/(1-r_0)$，检查结束后将所有缺陷品一次性返还给供应商；(f)考虑时间水平无限.

采用如下记号：K 表示供应商每次生产发生的启动成本；h_s 表示供应商单位时间单位产品的库存成本；c_s 表示供应商的单位生产费用；w 表示供应商处理缺陷品的单位处理费；Q 表示零售商每次订购的批量，决策变量；T 表示零售商的补货周期，决策变量；S_r 表示零售商每次订购的订购费；F 表示零售商每次订购的运输成本；h_r 表示零售商单位时间单位产品的库存成本，$h_r>h_s$；s 表示零售商的单位检查费.

1.2 模型

模型目标是确定供应商的产品的缺陷品率、零售商的订货批量和周期，使供应链的总成本达到最小. 由于不允许缺货，零售商订购的产品中合格品数量必须等于该周期的需求量，即

$$(1-r)Q=dT \text{ 或 } Q=dT/(1-r).$$

零售商的总成本由订购费、运输成本、检查费和库存成本组成，分别计算如下：

订购费：S_r；

运输成本：F；

检查费：$sQ=sdT/(1-r)$；

库存成本：$h_r[(1-r)QT/2+rQ^2/x]=h_rdT^2[1/2+rd/x(1-r)^2]$.

零售商的单位时间总成本：

$$TCP(r,T)=\frac{S_r+F}{T}+\frac{sd}{1-r}+h_rdT[\frac{1}{2}+\frac{rd}{x(1-r)^2}].$$

供应商的总成本由生产成本、生产启动成本、改善缺陷品率产生的费用、缺陷品的处理费和库存成本组成，分别计算如下：

生产成本：$c_sQ=c_sdT/(1-r)$；

生产启动成本：K；

改善缺陷品率产生的费用：$\delta\ln(r_0/r)$；

缺陷品的处理：$wrQ=wrdT/(1-r)$；

库存成本：$h_sQ^2/(2R)=h_sT^2d^2/[2R(1-r)^2]$.

供应商的单位时间总成本：

$$TCS(r,T)=\frac{d}{1-r}(c_s+wr)+\frac{K}{T}+\delta\ln\frac{r_0}{r}+\frac{h_sTd^2}{2R(1-r)^2}.$$

供应链的单位时间总成本 $TC(r,T)$ 为 $TCP(r,T)$ 与 $TCS(r,T)$ 之和，即

$$TC(r,T)=\frac{d}{1-r}(c_s+s+wr)+\delta\ln\frac{r_0}{r}+\frac{S_r+F+K}{T}+dT[\frac{h_r}{2}+\frac{d}{(1-r)^2}(\frac{rh_r}{x}+\frac{h_s}{2R})].$$

因此，本文所考虑的联合库存问题的数学模型为

$$\begin{aligned}&\min\ TC(r,T)\\&\text{s.t.}\quad 0<r\leqslant r_0,0<T.\end{aligned} \tag{1}$$

2 模型分析

对 $TC(r,T)$ 分别关于 T 和 r 求一阶导数：

$$\frac{\partial TC}{\partial T}=-\frac{S_r+F+K}{T^2}+h_rd[\frac{1}{2}+\frac{rd}{x(1-r)^2}]+\frac{h_sd^2}{2R(1-r)^2},$$

$$\frac{\partial TC}{\partial r}=\frac{d}{(1-r)^2}(c_s+s+w)-\frac{\delta}{r}+$$

$$d^2T[\frac{h_r(r+1)}{x(1-r)^3}+\frac{h_s}{R(1-r)^3}].$$

由一阶必要条件 $\partial TC/\partial T=0$ 和 $\partial TC/\partial r=0$ 得到

$$-\frac{S_r+F+K}{T^2}+h_rd[\frac{1}{2}+\frac{rd}{x(1-r)^2}]+\frac{h_sd^2}{2R(1-r)^2}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{d}{(1-r)^2}(c_s+s+w)-\frac{\delta}{r}+d^2T[\frac{h_r(r+1)}{x(1-r)^3}+\frac{h_s}{R(1-r)^3}]=0. \qquad (3)$$

由(2)式得到

$$T(r)=B/\sqrt{A(r)}, \qquad (4)$$

其中

$$A(r)=h_r\{1/d+2r/[x(1-r)^2]\}+h_s/[R(1-r)^2], B=\sqrt{2(S_r+F+K)/d^2}.$$

把(4)式代入(3)式,化简得到

$$d(c_s+s+w)-\frac{\delta}{r}(1-r)^2+d^2B(1-r)\sqrt{A(r)}+\frac{d^2Bh_r}{\sqrt{A(r)}}[\frac{1}{x}-\frac{1}{d}(1-r)]=0. \qquad (5)$$

记方程(5)的左边为 $f(r)$,得到下面结果.

引理 1 对函数 $f(r)$ 下列结论成立:

(a)当 $0<r<r_0$ 时, $f'(r)\geqslant 0$,即 $f(r)$ 是增函数;

(b)当 $f(r_0)\geqslant 0$ 时,方程组(2)和(3)存在唯一的解 $(r_1,T(r_1))$,其中 r_1 是方程 $f(r)=0$ 在 $(0,r_0]$ 的唯一解, $T(r_1)$ 由(4)式计算.

(c)当 $f(r_0)<0$ 时,对任意给定的 T, $\partial TC/\partial r<0$.

证明 (a)因为 $x\geqslant d/(1-r_0)$,对任意的 $0<r\leqslant r_0\leqslant 1$, $A(r)\geqslant 0$ 且

$$A'(r)=2h_r(1+r)/[x(1-r)^3]+2h_s/[R(1-r)^3]\geqslant 0. \qquad (6)$$

所以,

$$f'(r)=\delta(\frac{1}{r^2}-1)+\frac{d^2B}{\sqrt{A(r)}}[\frac{h_r}{d}-A(r)]+\frac{d^2B}{2}\frac{A'(r)}{\sqrt{A(r)}}[(1-r)+(\frac{1-r}{d}-\frac{1}{x})\frac{h_r}{A(r)}]\geqslant$$

$$\frac{d^2B}{\sqrt{A(r)}}[\frac{h_r}{d}-A(r)]+\frac{d^2B}{2}\frac{1}{\sqrt{A(r)}}A'(r)(1-r)=\frac{d^2B}{\sqrt{A(r)}}\frac{h_r(1-r)}{x(1-r)^2}\geqslant 0.$$

即 $f(r)$ 是 r 的递增函数.

(b)计算得到:当 $r\to 0$ 时, $f(r)\to-\infty$. 所以,当 $f(r_0)\geqslant 0$ 时,存在唯一的 r_1 满足 $f(r)=0$ 和 $0<r_1\leqslant r_0$. 将 r_1 代入(4)式,求得 $T_1=T(r_1)$. $(r_1, T(r_1))$ 即为方程组(2)和(3)的唯一解.

(c)当 $f(r_0)<0$ 时,由引理1(a)知道 $f(r)$ 是增函数, $f(r)<0$ 对 $r\leqslant r_0$ 成立. 于是 $\partial TC/\partial r=f(r)/(1-r)^2<0$.

定理 1 设 (r^*, T^*) 是模型(1)的最优解,可得

(a)若 $f(r_0)\geqslant 0$,则 $(r^*,T^*)=(r_1,T(r_1))$,其中 r_1 是方程 $f(r)=0$ 在 $(0,r_0]$ 的唯一解, $T(r_1)$ 由(4)式计算.

(b)若 $f(r_0)<0$,则 $(r^*,T^*)=(r_0,T(r_0))$.

证明 (a) 根据引理 1, $(r_1,T(r_1))$ 满足模型(1)的最优性一阶必要条件. $TC(r,T)$ 关于 r,T 的 HESS 矩阵为

$$H(r,T)=\begin{bmatrix}\partial^2TC/\partial T^2 & \partial^2TC/\partial T\partial r\\ \partial^2TC/\partial r\partial T & \partial^2TC/\partial r^2\end{bmatrix}.$$

其中

$$\partial^2TC/\partial T^2=2(S_r+F+K)/T^3=d^2B^2/T^3>0,$$

$$\partial^2TC/\partial r^2=2d(c_s+s+w)/(1-r)^3+\delta/r^2+d^2TA''(r)/2,$$

$$\partial^2TC/\partial r\partial T=\partial^2TC/\partial T\partial r=d^2A'(r)/2.$$

利用了(4)式,(6)式和

$$A''(r)=h_r(8+4r)/[x(1-r)^4]+6h_s/[R(1-r)^4]$$

计算 $H(r,T)$ 在 $(r_1,T(r_1))$ 行列式的值,并利用方程(2)和(3),得到

$$|H(r_1,T(r_1))|=\frac{d^2B^2}{(T(r_1))^3}\{\frac{2d}{(1-r_1)^3}(c_s+s+w)+\frac{\delta}{r_1^2}+\frac{d^2T(r_1)}{2}A''(r_1)\}-\{\frac{d^2A'(r_1)}{2}\}^2>$$

$$d^4\{\frac{h_r^2(4+2r_1)}{dx(1-r_1)^4}+\frac{3h_rh_s}{dR(1-r_1)^4}+\frac{h_r^2(3r_1^2+6r_1-1)}{x^2(1-r_1)^6}+\frac{h_rh_s(2+6r_1)}{Rx(1-r_1)^4}+\frac{2h_s^2}{R^2(1-r_1)^6}\}>\frac{h_r^2d^4(2r_1^3+3r_1^2+3)}{x^2(1-r_1)^6}>0,$$

因此, $H(r_1,T(r_1))$ 是正定的. 于是, $(r_1,T(r_1))$ 是 $TC(r,T)$ 的局部最小值点.

(b) 对任意给定的 $r\in(0,r_0]$,有 $\partial^2TC/\partial T^2>0$,因此 $TC(r,T)$ 在 $T=T(r)$ 取得最小值. 当 $T=T(r)$ 时, $\partial TC/\partial r=f(r)/(1-r)^2<0$,即 $TC(r,T)$ 关于 r 严格单调递减. 又因 $0<r\leqslant r_0$,所以当 $r=r_0$ 时, $TC(r,T)$ 在 $r=r_0$ 取得最小值. 因此, $TC(r,T)$ 的最小值点是 $(r^*,T(r^*))$,其中 $r^*=r_0$.

利用定理 1,可以确定模型的最优解 (r^*,T^*),

其中 r_1 可以用一维搜索方法求得.

3 数值例子及模型灵敏度分析

设库存系统的参数为 $K=200$,$F=25$,$S_r=100$,$R=16000$,$h_r=0.4$,$h_s=0.2$,$r_0=0.3$,$s=0.5$,$c_s=4$,$w=5$,$x=175200$,$\delta=20000$,$d=5000$,$r_0=0.4$.

由于 $f(r_0)=29804.69>0$,所以最优解是由定理 1(a)求解. 运用 Matlab 软件,求得最优缺陷品率为 $r^*=0.2412$,最优订货周期为 $T^*=0.5009$,最优订购量 $Q^*=3300.57$,供应链的最优成本为 $TC^*=49013.24$.

再利用上述例子,对模型的部分主要参数进行灵敏度分析,结果见表 1～3.

表 1 参数 d 变化时对最优解的影响

Table 1 The effects of d on optimal solutions

d	r^*	T^*	$\varphi(r^*)$	TC^*
3000	0.3215	0.6643	4368.74	32352.28
4000	0.2751	0.5674	7483.68	41053.16
5000	0.2412	0.5009	10119.40	49013.24
6000	0.2150	0.4516	12414.97	56467.42
7000	0.1942	0.4130	14453.90	63551.94
8000	0.1771	0.3818	16291.07	70353.53

表 2 参数 δ 变化时对最优解的影响

Table 2 The effects of δ on optimal solutions

δ	r^*	T^*	$\varphi(r^*)$	TC^*
10000	0.1510	0.5143	9740.91	41953.88
15000	0.2007	0.5074	10343.33	46052.91
20000	0.2412	0.5009	10119.40	49013.24
25000	0.2751	0.4949	9361.06	51198.07
30000	0.3041	0.4891	8222.30	52809.09
35000	0.3294	0.4837	6795.72	53972.69

表 3 参数 x 变化时对最优解的影响

Table 3 The effects of x on optimal solutions

x	r^*	T^*	$\varphi(r^*)$	TC^*
175200	0.2412	0.5009	10119.40	49013.24
185200	0.2412	0.5012	10118.79	49012.59
195200	0.2412	0.5014	10118.40	49012.01
205200	0.2412	0.5016	10117.74	49011.49
215200	0.2412	0.5018	10117.29	49011.01
225200	0.2412	0.5019	10116.87	49010.58

由表 1 可知:在 d 增大其它参数不变的情况下,改善缺陷品率产生的费用 $\varphi(r^*)$ 和供应链的最优总成本 TC^* 均增大,而最优缺陷品率 r^* 和最优周期 T^* 均减小.

由表 2 可知:在 δ 增大其它参数不变的情况下,最优缺陷品率 r^* 和供应链的最优总成本 TC^* 均增大,而最优周期 T^* 减小,改善缺陷品率产生的费用 $\varphi(r^*)$ 先增大后减小.

由表 3 可知:在 x 增大其它参数不变的情况下,最优周期 T^* 和供应链的最优总成本 TC^* 均增大,但增加幅度很小,而改善缺陷品率产生的费用 $\varphi(r^*)$ 逐渐减小,变化的幅度也很小,最优缺陷品率 r^* 基本不变.

4 结束语

本文研究的非完美质量产品的联合库存问题,其缺陷品率可以通过投资改变,产品的检查由零售商负责,且检查完成后将缺陷品降价处理. 我们建立了使联合成本最小的模型,并给出模型最优解的理论结果. 与文献[14]的研究不同:本文假设产品由零售商检验,并且增加了最优解的详细讨论,利用该理论结果可以方便地求出模型的最优解. 另外,数值算例的分析为生产部门科学的管理决策提供了依据. 在今后的研究中,可以进一步考虑由于联合决策产生的成本变动的协调问题,为复杂的生产决策问题提供解决方案.

参考文献:

[1] Salameh M K, Jaber M Y. Economic production quantity model for items with imperfect quality[J]. International Journal of Production Economics, 2000, 64(1-3): 59-64.

[2] Goyal S K, Cárdenas-Barrón L E. Note on: economic production quantity model for items with imperfect quality-a practical approach[J]. International Journal of Production Economics, 2002, 77(1): 85-87.

[3] Maddah B, Jaber M Y. Economic order quantity for items with imperfect quality: Revisited[J]. International Journal of Production Economics, 2008, 112(2): 808-815.

[4] Wee H M, Yu J, Chen M C. Optimal inventory model for items with imperfect quality and shortage backordering [J]. Omega, 2007, 35(1): 7-11.

[5] Chung K, Huang Y. Retailer's optimal cycle times in the EOQ model with imperfect quality and a permissible credit period[J]. Quality & Quantity, 2006, 40(1): 59-77.

[6] Li J, Feng H, Wang M. A replenishment policy with defective products, backlog and delay of payments [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2009, 5(4): 867-880.

[7] Ouyang L, Chang C, Shum P. The EOQ with defective items and partially permissible delay in payments linked to order quantity derived algebraically[J]. Central Euro-

pean Journal of Operations Research, 2010, 20(1): 141-160.

[8] Lin T. An economic order quantity with imperfect quality and quantity discounts[J]. Applied Mathematical Modelling ,2010,34(10):3158-3165.

[9] 莫降涛,朱彦利,孟立华.允许延期付款的EOQ模型[J].广西科学院学报,2008,24(2):73-78.
Mo J T,Zhu Y L,Meng L H. EOQ model under permissible delay in payments [J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences,2008,24(2):73-78.

[10] Huang C. An optimal policy for a single-vendor single-buyer integrated production - inventory problem with process unreliability consideration[J]. International Journal of Production Economics. 2004,91(1):91-98.

[11] Lo S,Wee H,Huang W. An integrated production-inventory model with imperfect production processes and Weibull distribution deterioration under inflation[J]. International Journal of Production Economics ,2007, 106(1):248-260.

[12] Lin Y,Ouyang L,Dang Y. A joint optimal ordering and delivery policy for an integrated supplier-retailer inventory model with trade credit and defective items[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218 (14):7498-7514.

[13] Soni H N,Patel K A. Optimal strategy for an integrated inventory system involving variable production and defective items under retailer partial trade credit policy [J]. Decision Support Systems,2012,54(1):235-247.

[14] 张新艳.考虑质量改进投资的联合经济批量模型研究[J].企业经济,2009(8):32-35.
Zhang X Y. An integrated EOQ model considering quality improvement by investment[J]. Enterprise Economy,2009(8):32-35.

（责任编辑:尹　闯）

（上接第186页 Continue from page 186）

参考文献:

[1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[2] Yao Y Y,Wong S K M. A decision theoretic framework for approximating concepts[J]. International Journal of Man-machine Studies,1992,37(6):793-809.

[3] Yao Y Y. Decision-theoretic rough set models[C]. The 2nd International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology,2007:1-12.

[4] 李华雄,周献中,李天瑞,等.决策粗糙集理论及其研究进展[M].北京:科学出版社,2011.
Li H X,Zhou X Z,Li T R,et al. Decision-theoretic rough sets theory and its research progress[M]. Beijing: Science Press,2011.

[5] 张文修,吴伟志,梁吉业,等.粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社,2001.
Zhang W X,Wu W Z,Liang J Y,et al. Rough sets theory and method[M]. Beijing:Science Press,2011.

[6] 赵文清,朱永利,高伟.一个基于决策粗糙集理论的信息过滤模型[J].计算机工程与应用,2007,43(7):185-187.
Zhao W Q, Zhu Y L, Gao W. An email classification scheme based on decision-theoretic sough set[J]. Computer Engineering and Applications, 2007, 43(7): 185-187.

[7] UCI repository of machine learning databases. University of California, Irvine, department of information and computation and computer sciences[EB/OL]. [2013-08-10] http://archive. ics. uci. edu/ml/datasets/Credit + Approval.

[8] 苗夺谦,王国胤,刘清.粒计算:过去、现在与展望[M].北京:科学出版社,2007.
Miao T Q, Wang G Y, Liu Q. Granular computing: the past, present and future[M]. Beijing: Science Press, 2007.

[9] Nguyen H S,Skowron A. Quantization of real-valued attributes[C]. In Proc Second International Joint Conference on Information Sciences, 1995, Wrightsville Beach NC:1995:34-37.

[10] Rosetta Development Team. Rosetta[EB/OL]. [2013-08-10]http://www. lcb. uu. se/tools/rosetta/.

（责任编辑:尹　闯）