网络优先数字出版时间:2014-3-25
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140325.001.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(2):192～195

ψ-混合序列下分位数估计的强相合及其 Bahadur 表示*
Bahadur Representation and Strong Consistency of Quantile Estimates for ψ-Mixing Random Sequences

张文婷[1],李永明[2]**
ZHANG Wen-ting[1],LI Yong-ming[2]

(1.广西师范学院数学科学学院,广西南宁 530023;2.上饶师范学院数学系,江西上饶 334001)
(1.Department of Mathematical Science,Guangxi Teachears Education University,Nanning,Guangxi,530023,China;2.Department of Mathematics,Shangrao Normal University,Shangrao,Jiangxi,334001,China)

摘要:在 ψ-混合序列下,利用指数不等式证明分位数估计的强相合性,并给出其 Bahadur 表示.

关键词:ψ-混合序列　分位数估计　Bahadur 表示
中图分类号:O212　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2014)02-0192-04

Abstract:Under ψ-mixing random variables,the strong consistency of the quantile estimates was proved by using the exponential inequality,and its Bahadur representation was given.

Key words:ψ-mixing sequence,quantile estimates,Bahadur representation

设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是固定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机变量序列,且具有相同的分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$.对于 $p\in(0,1)$,定义 $\xi_p=\inf\{x:F(x)\geqslant p\}$ 为 $F(x)$ 的 p 阶分位数,记为 $F^{-1}(p)$,其中函数 $F^{-1}(t),0<t<1$,是 F 的广义逆函数,易知 ξ_p 满足 $F(\xi_p-)\leqslant p\leqslant F(\xi_p)$.

对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n,n\geqslant 1$,设 $F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I(X_i\leqslant x),x\in R$,表示经验分布函数.令 $F_n^{-1}(p)=\inf\{x:F_n(x)\geqslant p\},0<p<1$,为 p 阶样本分位数.

自从 Bahadur 给出独立样本下分位数估计的 Bahadur 表示之后,有许多学者对此进行了研究,取得了不少成果.如:对于强混合条件,文献[1]在特定的条件下得到分位数估计的 Bahadur 表示.文献[2]给出分位数核估计的 Bahadur 表示.在 α-混合条件下文献[3,4]给出分位数估计的 Bahadur 表示,并且在相应的条件下给出比较好的收敛速度.文献[5]在缺失数据下给出了条件分位数的经验似然区间.在 NA 条件下,文献[6]给出分位数估计的 Bahadur 表示,其收敛速度要优于 ling(2008)[7].之后文献[8]在更弱的 NOD 样本下给出了 Bahadur 表示.

相合性是评价一个估计量好坏的常用标准.通常,不满足相合性要求的估计一般不予考虑.在这方面的研究有许多,如文献[9～11]分别在 $\tilde{\varphi}$、$\tilde{\rho}$ 和 α 混合序列下研究了估计量的相合性,并推广了相应的结果.

1963 年 Blum 等[12]引入了 ψ-混合序列,证明该混合条件下的一些强大数定律,并给出了一些随机过程是 ψ-混合序列的充要条件.之后,在 ψ-混合样本线性模型中吴群英[13]研究了回归参数 M 估计的强相合性.杨延召[14]给出了 ψ-混合序列线性形式具有强稳定性的充分条件.朱业春等[15]讨论了 ψ-混合序列

收稿日期:2013-04-30
修回日期:2013-09-20
作者简介:张文婷(1986-),男,硕士研究生,主要从事概率与数理统计研究。
*国家自然科学基金项目(10161004),江西省教育厅科技项目(GJJ12604)资助。
**通讯作者:李永明(1970-),教授,主要从事概率极限理论和统计大样本理论研究。Email:lym1019@163.com。

部分和的强大数定律,并对独立序列下的相应结果进行了推广.

本文主要采用文献[16]中的指数不等式,在 ψ-混合序列条件下讨论分位数估计的强相合性及其 Bahadur 表示.令 C,c 表示不依赖于 n 的正常数,且在不同的地方取值可能不同.

1 预备知识

定义[16] 记 $F_n^m=\sigma(X_i,n\leqslant i\leqslant m)$,混合系数为

$$\psi(n)=\sup_{m\geqslant 1}\sup_{A\in F_1^m,B\in F_{m+n}^{\infty},P(A)P(B)\neq 0}\left|\frac{P(AB)}{P(A)P(B)}-1\right|,$$

如果当 $n\to\infty$ 时,$\psi(n)\downarrow 0$,则称 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 为 ψ-混合序列.

引理 1[16] 设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是 ψ-混合序列,$EX_i=0$,$|X_i|\leqslant d<\infty$,a.s.,$i=1,2,\cdots$,$0<\beta<1$,$m=[n^{\beta}]$,$\Delta=\sum_{i=1}^{n}EX_i^{2}$.则对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $n\geqslant 2$ 有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|>\varepsilon\right)\leqslant 2eC_1\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2C_2(2\Delta+n^{\beta}d\varepsilon)}\right\},$$

其中,$C_1=\exp\{2en^{1-\beta}\psi(m)\}$,$C_2=4[1+4\sum_{i=1}^{2m}\psi(i)]$.

引理 2[17] 设 $F(x)$ 是右连续的分布函数,则广义逆函数 $F^{-1}(t)$ 在 $0<t<1$ 非降且左连续,并且满足

(i) $F^{-1}(F(x))\leqslant x,-\infty<x<+\infty$;

(ii) $F(F^{-1}(t))\geqslant t,0<t<1$;

(iii) $F(x)\geqslant t\Leftrightarrow x\geqslant F^{-1}(t)$.

引理 3[18] 令 $p\in(0,1)$,$\xi_{p,n}=F_n^{-1}(p)=\inf\{x:F_n(x)\geqslant p\}$,假设 $P(X_i=X_j)=0,i\neq j$.那么

$$p<F_n(\xi_{p,n})<p+\frac{1}{n},\text{a.s.}.$$

引理 4 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是具有相同分布函数 $F(x)$ 的 ψ-混合序列,其分布函数在 ξ_p 的邻域 $\mathcal{N}_p$ 内连续可导,密度函数满足 $0<q=\sup\{f(x):x\in\mathcal{N}_p\}<\infty$,其中 $p\in(0,1)$,对任意满足 $d_n\to 0$,$\frac{n^{\frac{1}{2}-\beta}d_n^2}{\log n}\to\infty$,$\frac{1}{1+\lambda}<\beta<\frac{1}{2}$,$\lambda>1$,$n\to\infty$ 的正实数序列 $\{d_n\}_{n\geqslant 1}$,记 $D_n=[\xi_p-d_n,\xi_p+d_n]$,$m=[n^{\beta}]$.若 $\psi(n)=O(n^{-\lambda})$,则有

$$\sup_{x\in D_n}|(F_n(x)-F(x))-(F_n(\xi_p)-p)|\leqslant(1+q)n^{-\frac{1}{4}}d_n,\text{a.s.}.$$

证明 设 $t_n=d_nn^{-\frac{1}{4}}$,$S_{r,n}=\xi_p+rt_n$,$\Delta_{r,n}=F_n(S_{r,n})-F(S_{r,n})-F_n(\xi_p)+p$,$r=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m_n$,$m_n=[n^{\frac{1}{4}}]+1$,$D_n\subset[\xi_p-m_nt_n,\xi_p+m_nt_n]=\bigcup_{r=-m_n}^{m_n-1}[\xi_p+rt_n,\xi_p+(r+1)t_n]$.

由于

$$\sup_{x\in D_n}|F_n(x)-F(x)-F_n(\xi_p)+p|\leqslant\sup_{\xi_p-m_nt_n\leqslant x\leqslant\xi_p+m_nt_n}|F_n(x)-F(x)-F_n(\xi_p)+p|=\max_{-m_n\leqslant r\leqslant m_n-1}\sup_{\xi_p+rt_n\leqslant x\leqslant\xi_p+(r+1)t_n}|F_n(x)-F(x)-F_n(\xi_p)+p|.$$

又对所有的 $x\in[\xi_p+rt_n,\xi_p+(r+1)t_n]$,由 $F_n(x)$ 是非降函数,利用微分中值定理可得

$$F_n(x)-F(x)-F_n(\xi_p)+p\leqslant F_n(S_{r+1,n})-F(S_{r,n})-F_n(\xi_p)+p=\Delta_{r+1,n}+F(S_{r+1,n})-F(S_{r,n})\leqslant\Delta_{r+1,n}+qt_n,\tag{1}$$

$$F_n(x)-F(x)-F_n(\xi_p)+p\geqslant F_n(S_{r,n})-F(S_{r+1,n})-F_n(\xi_p)+p=\Delta_{r,n}+F(S_{r,n})-F(S_{r+1,n})\geqslant\Delta_{r,n}-qt_n.\tag{2}$$

因此,根据(1),(2)式可得

$$\sup_{x\in D_n}|F_n(x)-F(x)-F_n(\xi_p)+p|\leqslant\max_{-m_n\leqslant r\leqslant m_n}|\Delta_{r,n}|+qt_n.\tag{3}$$

又设 $\eta_i=I(X_i\leqslant\xi_p+rt_n)-EI(X_i\leqslant\xi_p+rt_n)$,$i=1,2,\cdots,n$.显然 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 ψ-混合随机变量,其中混合系数不变,且 $E\eta_i=0$,$|\eta_i|\leqslant 2$,$i=1,2,\cdots$,$\Delta=\sum_{i=1}^{n}E\eta_i^2\leqslant 4n$.从而根据引理 1 即得

$$P(|\Delta_{r,n}|>t_n)=P(|F_n(S_{r,n})-F(S_{r,n})-F_n(\xi_p)+p|>t_n)\leqslant P(|F_n(S_{r,n})-F(S_{r,n})|>\frac{t_n}{2})+P(|F_n(\xi_p)-p|>\frac{t_n}{2})\leqslant$$

$$4eC_1\exp\left\{-\frac{n^2(\frac{t_n}{2})^2}{2C_2(8n+2n^{\beta+1}\frac{t_n}{2})}\right\}\leqslant$$

$$4eC_1\exp\left\{-\frac{n^2(\frac{t_n}{2})^2}{2C_2(8+t_n)n^{\beta+1}}\right\}\leqslant$$

$$4eC_1\exp\left\{-\frac{n^{\frac{3}{2}}d_n^2}{72C_2n^{\beta+1}}\right\}=4eC_1\exp\left\{-\frac{n^{\frac{1}{2}-\beta}d_n^2}{72C_2\log n}\log n\right\},$$

其中 C_1 和 C_2 的定义见引理 1.由条件 $\psi(n)=O(n^{-\lambda})$,$\frac{1}{1+\lambda}<\beta<\frac{1}{2}$,$\lambda>1$,$m=[n^{\beta}]$,可得,

$$C_1=\exp\{2en^{1-\beta}\psi(m)\}\leqslant\exp\{2ecn^{1-\beta}n^{-\lambda\beta}\}=\exp\{2ecn^{1-(1+\lambda)\beta}\}\leqslant\exp\{2ce\},$$

$$C_2=4(1+4\sum_{i=1}^{2m}\psi(i))\leqslant 4(1+4\sum_{i=1}^{\infty}\psi(i))<$$

$c < \infty$.

因此有

$$P(|\Delta_{r,n}| > t_n) \leqslant 4eC_1\exp\{-\frac{n^{\frac{1}{2}-\beta}d_n^2}{72C_2\log n}\cdot\log n\} \leqslant \frac{C}{n^2},$$

由此得

$$P(\max_{-m_n\leqslant r\leqslant m_n}|\Delta_{r,n}| > t_n) \leqslant \sum_{r=-m_n}^{m_n}P(|\Delta_{r,n}| > t_n) \leqslant \frac{C}{n^{7/4}}.$$ 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{-m_n\leqslant r\leqslant m_n}|\Delta_{r,n}| > t_n) < \infty$.

故由 Borel - Contelli 引理及(3) 式可得

$$\sup_{x\in D_n}|(F_n(x)-F(x))-(F_n(\xi_p)-p)| \leqslant (1+q)n^{-\frac{1}{4}}d_n, \text{a. s.}.$$

2 主要结果

定理 1 假设 $p\in(0,1)$,$\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ 是具有相同的分布函数 $F(x)$ 的 ψ - 混合序列,其分布函数在 ξ_p 处可导,满足 $F'(\xi_p)=f(\xi_p)>0$. 若 $f(x)$ 在 ξ_p 的领域内有界,且 $\psi(n)=O(n^{-\lambda})$,$m=[n^\beta]$,那么对任意满足 $d_n\to 0$,$\frac{n^{\frac{1}{2}-\beta}d_n^2}{\log n}\to\infty$,$\frac{1}{1+\lambda}<\beta<\frac{1}{2}$,$\lambda>1$,$n\to\infty$ 的正实数序列 $\{d_n\}_{n\geqslant 1}$ 有 $\xi_{p,n}-\xi_p=o(n^{-\frac{1}{4}}d_n)$, a. s..

证明 对于任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$P(|\xi_{p,n}-\xi_p| > \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P(\xi_{p,n}-\xi_p > \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) + P(\xi_{p,n}-\xi_p < -\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) =: I_1 + I_2.$$

由引理 2 可得

$$I_1 = P(\xi_{p,n}-\xi_p > \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P(\xi_{p,n} > \xi_p + \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P\{p > F_n(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)\} = P\{-F_n(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) > -p\} = P\{1-F_n(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)-(1-F(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)) > F(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)-p\} = P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_i-Ew_i) > \delta_1\},$$

其中 $w_i=I(X_i>\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)$,$\delta_1=F(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)-p$.

同理可得

$$I_2 = P(\xi_{p,n}-\xi_p < -\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P(\xi_{p,n} < \xi_p - \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P\{p < F_n(\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)\} = P\{F_n(\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)-F(\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) > p-F(\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)\} = P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i-Ev_i) > \delta_2\},$$

其中 $v_i=I(X_i\leqslant\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)$,$\delta_2=p-F(\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)$.

显然,序列 $\{w_i-Ew_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 和 $\{v_i-Ev_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 也是 ψ - 混合序列,其混合系数不变,均值为 0,并且有 $|w_i-Ew_i|\leqslant 2$,$|v_i-Ev_i|\leqslant 2$,$i=1,2,\cdots$,$\Delta\leqslant 4n$. 从而由引理 1 可得

$$P(|\xi_{p,n}-\xi_p| > \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_i-Ew_i) > \delta_1\} + P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i-Ev_i) > \delta_2\} \leqslant 4eC_1\exp\{-\frac{[n\min(\delta_1,\delta_2)]^2}{2C_2[8n+2n^{1+\beta}\max(\delta_1,\delta_2)]}\} \leqslant 4eC_1\exp\{-\frac{n^{1-\beta}[\min(\delta_1,\delta_2)]^2}{2C_2[8+2\max(\delta_1,\delta_2)]}\},$$

其中 C_1,C_2 的定义见引理 1. 又因为 $F(x)$ 在 ξ_p 点处连续,$F'(\xi_p)>0$,ξ_p 是不等式 $F(x-)\leqslant p\leqslant F(x)$ 的唯一解且 $F(\xi_p)=p$,由 Taylor 展开得

$$F(\xi_p+\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n)-p = f(\xi_p)\cdot\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n + o(\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n),$$

$$p-F(\xi_p-\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = f(\xi_p)\cdot\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n + o(\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n).$$

所以当 $n\to\infty$ 时有 $\min(\delta_1,\delta_2)=f(\xi_p)\cdot\varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n$,$\max\{\delta_1,\delta_2\}\to 0$. 因此

$$P(|\xi_{p,n}-\xi_p| > \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) = P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(w_i-Ew_i) > \delta_1\} + P\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(v_i-Ev_i) > \delta_2\} \leqslant 4eC_1\exp\{-\frac{n^{1-\beta}[\min(\delta_1,\delta_2)]^2}{2C_2[8+2\max(\delta_1,\delta_2)]}\} \leqslant 4eC_1\exp\{-\frac{f^2(\xi_p)\varepsilon^2n^{\frac{1}{2}-\beta}d_n^2}{(16C_2+2)\log n}\cdot\log n\} \leqslant \frac{C}{n^2},$$

C_1,C_2 与引理 4 中的一致. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_{p,n}-\xi_p| > \varepsilon n^{-\frac{1}{4}}d_n) < \infty$. 再由 Borel - contelli 引理可得

$$\xi_{p,n}-\xi_p = o(n^{-\frac{1}{4}}d_n), \text{a. s.}.$$

定理 2 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是具有相同分布函数 $F(x)$ 的 ψ - 混合序列,其分布函数在 ξ_p 的邻域 $\mathcal{N}_p$ 内连续可导,密度函数满足 $0<q=\sup\{f(x): x\in\mathcal{N}_p\}<\infty$,$f(x)$ 在 ξ_p 的邻域内有界并且为正数,其中 $p\in(0,1)$,又假设 $P(X_i=X_j)=0$,$i\neq j$. 那么对任意满足 $d_n\to 0$,$\frac{n^{\frac{1}{2}-\beta}d_n^2}{\log n}\to\infty$,$\frac{1}{1+\lambda}<\beta<\frac{1}{2}$,$\lambda>1$,$n\to\infty$ 的正实数序列 $\{d_n\}_{n\geqslant 1}$,若 $\psi(n)=O(n^{-\lambda})$,$m=[n^\beta]$,则

$$\xi_{p,n}-\xi_p = -\frac{F_n(\xi_p)-F(\xi_p)}{f(\xi_p)} + O(d_nn^{-\frac{1}{4}}), \text{a. s.}.$$

证明 由定理 1 有

$$\xi_{p,n}-\xi_p = o(n^{-\frac{1}{4}}d_n), \text{a. s.}. \quad (4)$$

由引理 4 可得

$$F_n(\xi_p) - F(\xi_p) = F_n(\xi_{p,n}) - F(\xi_{p,n}) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n), \text{a. s.} . \quad (5)$$

又根据引理 3,得

$$F_n(\xi_{p,n}) - p = O(n^{-1}), \text{ a. s.} . \quad (6)$$

根据(4) ~ (6) 式并利用 Taylor 展开可得

$$F_n(\xi_p) - F(\xi_p) = F(\xi_p) - F(\xi_{p,n}) + F_n(\xi_{p,n}) - F(\xi_p) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n) = F(\xi_p) - F(\xi_{p,n}) + O(n^{-1}) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n) = F(\xi_p) - [F(\xi_p) + f(\xi_p)(\xi_{p,n} - \xi_p) + \frac{1}{2} f'(\theta_n)(\xi_{p,n} - \xi_p)^2] + O(n^{-1}) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n) = -f(\xi_p)(\xi_{p,n} - \xi_p) - \frac{1}{2} f'(\theta_n)(\xi_{p,n} - \xi_p)^2 + O(n^{-1}) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n) = -f(\xi_p)(\xi_{p,n} - \xi_p) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n) + O(n^{-1}) + O(n^{-\frac{1}{2}} d_n{}^2) = -f(\xi_p)(\xi_{p,n} - \xi_p) + O(n^{-\frac{1}{4}} d_n),$$

其中 θ_n 是介于 $\xi_{p,n}$ 与 ξ_p 之间的随机变量. 整理上式可得

$$\xi_{p,n} - \xi_p = -\frac{F_n(\xi_p) - F(\xi_p)}{f(\xi_p)} + O(d_n n^{-\frac{1}{4}}), \text{a. s.} .$$

参考文献:

[1] Sun S X. The Bahadur representation for sample quantiles under weak dependence[J]. Statistics Probability Letters, 2006, 76: 1238-1244.

[2] Ajami M, Fakoor V, Jomhoori S. The Bahadur representation for kernel-type estimator of the quantile function under strong mixing and censored data[J]. Statistics Probability Letters, 2011, 81(8): 1306-1310.

[3] Xing G D, Yang S C, Liu Y, et al. A note on the Bahadur representation of sample quantiles for α-mixing random variables[J]. Monatshefte für Mathematik, 2012, 165: 579-596.

[4] Zhang Q C, Yang W Z, Hu S H. On Bahadur representation for sample quantiles under α-mixing sequence[J]. Statistical Papers, 2012. doi: 10. 1007/soo362 - 012 - 0472-z.

[5] 郑李玲. 缺失数据情形条件分位数的经验似然置信区间[J]. 广西科学院学报, 2013, 29(4): 269-274.
Zheng L L. Empirical likelihood confidence intervals for conditional quantiles with missing data[J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences, 2013, 29(4): 269-274.

[6] Xing G D, Yang S C. A remark on the Bahadur representation of sample quantiles for negatively associated sequences[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2011, 40(3): 277-280.

[7] Ling N X. The Bahadur representation for sample quantiles under negatively associated sequence[J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78: 2660-2663.

[8] 李晓琴. AANA 序列的若干极限定理及 NOD 样本的 Bahadur 表示[D]. 合肥: 安徽大学, 2012.
Li X Q. Some limit theorems for AANA sequence and the Bahadur representation for NOD sample[D]. Heifei: Anhui University, 2012.

[9] 冯凤香. 不同分布 $\tilde{\varphi}$-混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 广西科学, 2009, 16(2): 117-119.
Feng F X. Convergence of weighted sums of different distributed $\tilde{\varphi}$-Mixing random sequences[J]. Guangxi Sciences, 2009, 16(2): 117-119.

[10] 鄢寒, 吴群英, 孟兵. $\bar{\rho}$-混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 广西科学, 2009, 16(1): 38-40.
Yan H, Wu Q Y, Meng B. Complete convergence and strong convergence for weighted sums of $\bar{\rho}$-Mixing random sequences[J]. Guangxi Sciences, 2009, 16(1): 38-40.

[11] 罗中德. 强混合序列下非参回归函数加权核估计的强收敛速度[J]. 广西科学, 2013, 20(1): 17-21.
Luo Z D. Strong convergence rate of weighted kernel estimator of nonparametric regression functions under strong mixing sequences[J]. Guangxi Sciences, 2013, 20(1): 17-21.

[12] Blum J R, Hanson D L, Koopmans L. On the strong law of large numbers for a class of stochastic process[J]. Z Wahrsch Verw Gebiete, 1963, 2: 1-11.

[13] 吴群英. ρ-混合, φ-混合, ψ-混合线性模型 M 估计的强相合性[J]. 应用数学, 2004, 17(3): 393-397.
Wu Q Y. Strong consistency of M estimator in linear model for ρ-mixing, φ-mixing, ψ-mixing samples[J]. Mathematica Applicata, 2004, 17(3): 393-397.

[14] Yang Y Z, Liu Y Y. Strong stability of linear forms of Ψ-mixing random variables[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2011, 27(4): 337-345.

[15] Zhu Y C, Deng Xin, Pan Jing, et al. Strong law of large numbers for sequences of ψ-mixing random variables[J]. Journal of Mathematical Study, 2012, 45(4): 404-410.

[16] 胡舒合, 李晓琴, 杨文志, 等. 混合序列的 Bernstein 不等式及其逆矩[J]. 数学物理学报, 2012, 32A(3): 441-449.
Hu S H, Li X Q, Yang W Z, et al. Bernstein inequalities and inverse moments for mixing sequences[J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32A(3): 441-449.

[17] Serfling R J. Approximation theorems of mathematical statistics[M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.

[18] Wang X J, Hu S H, Yang W Z. The Bahadur representation for sample quantiles under strongly mixing sequence[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2011, 141: 655-662.

(责任编辑:尹　闯)