网络优先数字出版时间:2014-4-30
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140430.005.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(3):293~297

高斯型求积校正新公式*

The New Correction Formulas of Gauss Quadrature

谭云龙,黄敬频

TAN Yun-long,HUANG Jing-pin

(广西民族大学理学院,广西南宁 530006)

(College of Science,Guangxi University for Nationalities,Nanning,Guangxi,530006,China)

摘要:基于高斯-勒让德求积公式余项,给出一种新的数值积分校正公式.该校正公式相比原高斯型求积公式可提高四阶代数精度,即 n 点校正公式的代数精度至少达 $2n+3$,而且数值算例表明,该校正公式的数值精度明显优于原高斯型求积公式和其他已知的计算结果.

关键词:高斯积分 代数精度 校正公式 数值算例

中图分类号:O241.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2014)03-0293-05

Abstract:Based on the remainder of Gauss-Legendre quadrature formula,a new correction formula for numerical integral is given. And it is proved that the correction formula can improve four-order algebraic accuracy compared with traditional Gauss integral formula,that is,the algebraic accuracy of n-point correction formula to be at least $2n+3$. Numerical examples show that the correction formulas have higher accuracy than the traditional Gauss integral and the results obtained from other relevant literature.

Key words:Gauss integral,algebraic accuracy,correction formula,numerical example

随着计算机技术的快速发展,在信号处理、有限元分析、小波分析、系统工程理论等问题的研究中,总遇到定积分的数值计算.因此,高精度求积公式的构造,一直是人们关注的论题[1~3].

高斯型积分是一种高精度的数值求积方法,它具有精度高,稳定性好等优点.近年来,一些学者深入探讨了高斯型积分公式的极限性质、中间点的渐近性质,以及对高斯型求积公式的推广和改进等问题[4~7].最近,文献[8]又对高斯-勒让德求积公式给出一种校正方法,使得 n 点校正公式的代数精度至少达 $2n+1$.

本文基于高斯-勒让德求积公式余项,进一步探讨高斯型积分公式的校正方法.通过构造与证明,本文获得结果:n 点校正公式的代数精度至少达 $2n+3$,即相比原高斯型求积公式可提高4阶代数精度.

1 预备知识

先给出有关记号、定义和引理.用 $C^m[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上的 m 阶连续可微函数;$P_n(x)$ 表示 n 次勒让德多项式,即

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,n=0,1,\cdots$$

定义 1[9] 如果求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{j=1}^n A_j f(x_j) \tag{1}$$

的代数精度为 $2n-1$ 次,则称(1)式为高斯型求积公式,节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为高斯点.

设 $f(x)\in C^{2n}[-1,1]$.根据勒让德多项式的性质、以及高斯-勒让德求积公式的构造方法可知,$P_n(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的正交多项式,且在 $[-1,1]$ 上有 n 个互异的实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,这些实根正是下面高斯型求积公式(2)的高斯点[9]:

收稿日期:2013-09-20
修回日期:2013-10-15
作者简介:谭云龙(1988-),女,硕士研究生,主要从事数值代数研究。
*广西民族大学研究生创新项目(gxun-chx2012099),广西高校科研基金项目(2013YB076)资助。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n[f], \tag{2}$$

其中积分余项

$$R_n[f] = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\omega_n^2(x)\mathrm{d}x = C_n f^{(2n)}(\eta), \eta \in (-1,1), \tag{3}$$

$$\begin{cases} \omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k), \\ C_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}, \end{cases} \tag{4}$$

求积系数

$$A_k = \frac{2}{(1-x_k^2)[P_n'(x_k)]^2} = \frac{2(1-x_k^2)}{(n+1)^2[P_{n+1}(x_k)]^2}, k = 1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

由于当 n 是偶数时，$P_n(x)$ 是偶函数；当 n 是奇数时，$P_n(x)$ 是奇函数[9]. 于是有

引理 1 勒让德多项式 $P_n(x)$ 的零点 x_k 关于原点对称分布，即

$$x_k = -x_{n+1-k}, k = 1,2,\cdots,[\frac{n}{2}],$$

从而 $A_k = A_{n+1-k}$.

引理 2[8] 设 $f(x) \in C^{2n}[-1,1]$，C_n 和 A_k 分别由(4)式，(5)式给出，则高斯型校正公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + C_n f^{(2n)}(0) \tag{6}$$

的代数精度至少达 $2n+1$.

2 主要结果

基于高斯 - 勒让德求积余项(3)，从提高代数精度角度，进一步讨论高斯型积分公式(2)的校正算法. 对此，给出一个新的 n 点校正公式.

定理 1 设 $f(x) \in C^{2n+2}[-1,1]$，$\{x_k\}$，$\{A_k\}$ 是原高斯点和求积系数，则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + C_n f^{(2n)}(0) + D_n f^{(2n+2)}(0) \tag{7}$$

的代数精度至少达 $2n+3$. 其中

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}, \\ D_n = \dfrac{1}{(2n+2)!}\left(\dfrac{2}{2n+3} - \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{2n+2}\right). \end{cases} \tag{8}$$

证明 由引理 2 知，高斯型校正公式(6)的代数精度至少达 $2n+1$. 因此，只需验证公式(7)对 $f(x) = x^{2n+2}, x^{2n+3}$ 精确成立即可.

(Ⅰ)当 $f(x) = x^{2n+2}$ 时，

$$f^{(2n)}(x) = (n+1)(2n+1)!x^2, f^{(2n+2)}(x) = (2n+2)!,$$

这时，直接计算(7)式的右边得

$$\sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{2n+2} + C_n f^{(2n)}(0) + D_n f^{(2n+2)}(0) = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{2n+2} + 0 + D_n(2n+2)! = \frac{2}{2n+3}.$$

又因为 $\int_{-1}^{1} x^{2n+2}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{2n+3}$，因此(7) 式精确成立.

(Ⅱ)当 $f(x) = x^{2n+3}$ 时，

$$f^{(2n)}(x) = \frac{(2n+3)!}{3!}x^3, f^{(2n+2)}(x) = (2n+3)!x.$$

这时，根据引理 1，直接计算(7) 式的右边得

$$\sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{2n+3} + C_n f^{(2n)}(0) + D_n f^{(2n+2)}(0) = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^{2n+3} + 0 + 0 = \sum_{k=1}^{[n/2]}(A_k x_k^{2n+3} + A_{n+1-k} x_{n+1-k}^{2n+3}) = \sum_{k=1}^{[n/2]}(A_k - A_{n+1-k})x_k^{2n+3} = 0.$$

另一方面，$f(x) = x^{2n+3}$ 是奇函数，显然有 $\int_{-1}^{1} x^{2n+3}\mathrm{d}x = 0$，因此(7)式精确成立. 于是，公式(7)的代数精度至少达 $2n+3$. 证毕.

由定理 1 可知，相比原高斯型求积公式(2)，n 点校正公式(7)可提高 4 阶代数精度. 一般地，当积分区间为 $[a,b]$ 时，通过变换

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2},$$

即可将区间 $[a,b]$ 变为 $[-1,1]$，这时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})\mathrm{d}t.$$

于是，对等式右端利用校正公式(7)，可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f(\frac{b-a}{2}t_k + \frac{a+b}{2}) + C_n(\frac{b-a}{2})^{2n+1} \cdot f^{(2n)}(\frac{a+b}{2}) + D_n(\frac{b-a}{2})^{2n+3} \cdot f^{(2n+2)}(\frac{a+b}{2}), \tag{9}$$

其中 $\{t_k\}$，$\{A_k\}$ 是原高斯点和求积系数，C_n，D_n 如(8)式所示.

特别地，当 $n=2$ 时，可得

$$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$A_1 = A_2 = 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{135}, D_2 = \frac{1}{3402}.$$

于是，由(9)式得两点校正公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(\frac{a+b}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{b-a}{2})+f(\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{b-a}{2})]+\frac{(b-a)^5}{4320}f^{(4)}(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^7}{435456}f^{(6)}(\frac{a+b}{2}). \tag{10}$$

当 $n=3$ 时,可得

$$t_1=-\frac{\sqrt{15}}{5},t_2=0,t_3=\frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$A_1=\frac{5}{9},A_2=\frac{8}{9},A_3=\frac{5}{9},$$

$$C_3=\frac{1}{15750},D_3=\frac{11}{5670000},$$

于是,由(9)式得三点校正公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{2}[\frac{5}{9}f(\frac{a+b}{2}-\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{b-a}{2})+\frac{8}{9}f(\frac{a+b}{2})+\frac{5}{9}f(\frac{a+b}{2}+\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{b-a}{2})]+\frac{(b-a)^7}{15750\times 2^7}f^{(6)}(\frac{a+b}{2})+\frac{11(b-a)^9}{5670000\times 2^9}f^{(8)}(\frac{a+b}{2}). \tag{11}$$

再讨论计算二重积分的高精度校正公式. 对此,先考虑正方形区域:

$$\Omega=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\}$$

上的二重积分 $I=\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 利用高斯型 n 点校正公式(7),可得

$$I=\int_{-1}^1(\int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\approx\int_{-1}^1(\sum_{i=1}^n A_i f(x_i,y)+C_n\frac{\partial^{2n}f(0,y)}{\partial x^{2n}}+D_n\frac{\partial^{2n+2}f(0,y)}{\partial x^{2n+2}})\mathrm{d}y=$$

$$\int_{-1}^1\sum_{i=1}^n A_i f(x_i,y)\mathrm{d}y+C_n\int_{-1}^1\frac{\partial^{2n}f(0,y)}{\partial x^{2n}}\mathrm{d}y+D_n\int_{-1}^1\frac{\partial^{2n+2}f(0,y)}{\partial x^{2n+2}}\mathrm{d}y\triangleq I_1+I_2+I_3.$$

对区间 $[-1,1]$ 上关于 y 的积分 I_1,I_2,I_3,再次利用 n 点校正公式(7),分别计算得

$$I_1=\int_{-1}^1\sum_{i=1}^n A_i f(x_i,y)\mathrm{d}y\approx\sum_{i=1}^n A_i[\sum_{j=1}^n A_j f(x_i,y_j)+C_n\frac{\partial^{2n}f(x_i,0)}{\partial y^{2n}}+D_n\frac{\partial^{2n+2}f(x_i,0)}{\partial y^{2n+2}}]=$$

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_iA_j f(x_i,y_j)+C_n\sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial^{2n}f(x_i,0)}{\partial y^{2n}}+D_n\sum_{i=1}^n A_i\frac{\partial^{2n+2}f(x_i,0)}{\partial y^{2n+2}},$$

$$I_2=C_n\int_{-1}^1\frac{\partial^{2n}f(0,y)}{\partial x^{2n}}\mathrm{d}y\approx$$

$$C_n[\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial^{2n}f(0,y_j)}{\partial x^{2n}}+C_n\frac{\partial^{4n}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}}+D_n\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n+2}}]=C_n\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial^{2n}f(0,y_j)}{\partial x^{2n}}+(C_n)^2\frac{\partial^{4n}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}}+C_nD_n\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n+2}},$$

$$I_3=D_n\int_{-1}^1\frac{\partial^{2n+2}f(0,y)}{\partial x^{2n+2}}\mathrm{d}y\approx$$

$$D_n[\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial^{2n+2}f(0,y_j)}{\partial x^{2n+2}}+C_n\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n}}+D_n\frac{\partial^{4n+4}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n+2}}]=D_n\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial^{2n+2}f(0,y_j)}{\partial x^{2n+2}}+C_nD_n\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n}}+(D_n)^2\frac{\partial^{4n+4}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n+2}},$$

于是

$$I\approx I_1+I_2+I_3=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_iA_j f(x_i,y_j)+C_n\sum_{i=1}^n A_i(\frac{\partial^{2n}f(x_i,0)}{\partial y^{2n}}+\frac{\partial^{2n}f(0,y_i)}{\partial x^{2n}})+D_n\sum_{i=1}^n A_i(\frac{\partial^{2n+2}f(x_i,0)}{\partial y^{2n+2}}+\frac{\partial^{2n+2}f(0,y_i)}{\partial x^{2n+2}})+(C_n)^2\frac{\partial^{4n}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}}+C_nD_n(\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n+2}}+\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n}})+(D_n)^2\frac{\partial^{4n+4}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n+2}}.$$

因此,关于二重积分 $I=\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,可得一个新的 n 点校正公式.

定理 2 设 $\{x_i\}$,$\{y_i\}$ 都是区间 $[-1,1]$ 上的高斯点(从而 $x_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$),$\{A_i\}$ 是相应的求积系数,C_n,D_n 如(8)式所示,$f(x,y)\in C^{2n+2,2n+2}[-1,1]^2$,则

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\approx\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_iA_j f(x_i,y_j)+C_n\sum_{i=1}^n A_i(\frac{\partial^{2n}f(x_i,0)}{\partial y^{2n}}+\frac{\partial^{2n}f(0,y_i)}{\partial x^{2n}})+D_n\sum_{i=1}^n A_i(\frac{\partial^{2n+2}f(x_i,0)}{\partial y^{2n+2}}+\frac{\partial^{2n+2}f(0,y_i)}{\partial x^{2n+2}})+(C_n)^2\frac{\partial^{4n}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}}+C_nD_n(\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n+2}}+\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n}})+(D_n)^2\frac{\partial^{4n+4}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n+2}}, \tag{12}$$

且公式(12)的代数精度至少达 $2n+3$.

证明 要证公式(12)具有 $2n+3$ 次代数精度,只要证二元多项式函数 $f(x,y)=x^ky^m$ 对任意的非负整数 k,m $(0\leqslant k,m\leqslant 2n+3)$,公式(12)精确成立即可.

首先,根据定理 1,当 $0\leqslant k,m\leqslant 2n+3$ 时,(12)式左边可用校正公式(7)精确计算,即

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^k y^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}x^k\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}y^m\mathrm{d}y=$$

$$[\sum_{i=1}^{n}A_i x_i^k+C_n(x^k)_{x=0}^{(2n)}+D_n(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}]\cdot[\sum_{j=1}^{n}A_j y_j^m+$$
$$C_n(y^m)_{y=0}^{(2n)}+D_n(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}],$$

其次,引入记号:$(x^k)_{x=0}^{(s)}$,表示 $g(x)=x^k$ 在 $x=0$ 处的 s 阶导数.则当 $f(x,y)=x^k y^m$ 时,直接计算(12)式右边,得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_iA_jf(x_i,y_j)+C_n\sum_{i=1}^{n}A_i(\frac{\partial^{2n}f(x_i,0)}{\partial y^{2n}}+$$
$$\frac{\partial^{2n}f(0,y_i)}{\partial x^{2n}})+D_n\sum_{i=1}^{n}A_i(\frac{\partial^{2n+2}f(x_i,0)}{\partial y^{2n+2}}+$$
$$\frac{\partial^{2n+2}f(0,y_i)}{\partial x^{2n+2}})+(C_n)^2\frac{\partial^{4n}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n}}+$$
$$C_nD_n(\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n}\partial y^{2n+2}}+\frac{\partial^{4n+2}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n}})+$$
$$(D_n)^2\frac{\partial^{4n+4}f(0,0)}{\partial x^{2n+2}\partial y^{2n+2}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_iA_jx_i^ky_j^m+$$
$$C_n\sum_{i=1}^{n}A_i[x_i^k(y^m)_{y=0}^{(2n)}+(x^k)_{x=0}^{(2n)}y_i^m]+$$
$$D_n\sum_{i=1}^{n}A_i[x_i^k(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}+(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}y_i^m]+$$
$$(C_n)^2(x^k)_{x=0}^{(2n)})(y^m)_{y=0}^{(2n)}+C_nD_n[(x^k)_{x=0}^{(2n)}(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}+$$
$$(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}(y^m)_{y=0}^{(2n)}]+(D_n)^2[(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}]=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_iA_jx_i^ky_j^m+$$
$$C_n[(y^m)_{y=0}^{(2n)}\sum_{i=1}^{n}A_ix_i^k+(x^k)_{x=0}^{(2n)}\sum_{j=1}^{n}A_jy_j^m]+$$
$$D_n[(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}\sum_{i=1}^{n}A_ix_i^k+(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}\sum_{j=1}^{n}A_jy_j^m]+$$
$$(C_n)^2(x^k)_{x=0}^{(2n)}(y^m)_{y=0}^{(2n)})+$$
$$C_nD_n[(x^k)_{x=0}^{2n}(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}+(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}(y^m)_{y=0}^{(2n)}]+$$
$$(D_n)^2[(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}]=[\sum_{i=1}^{n}A_ix_i^k+$$
$$C_n(x^k)_{x=0}^{(2n)}+D_n(x^k)_{x=0}^{(2n+2)}]\cdot[\sum_{j=1}^{n}A_jy_j^m+C_n(y^m)_{y=0}^{(2n)}+$$
$$D_n(y^m)_{y=0}^{(2n+2)}].$$

因此,公式(12)精确成立,从而其代数精度至少达 $2n+3$. 证毕.

3 数值算例

选取文献[8]中 3 个数值算例,并用本文方法进行计算,然后对比有关结果.

例 1 数值计算 $I_1=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$,并与准确值 $I_1=\ln\frac{2e}{1+e}\approx 0.3798854930417$ 比较,结果见表 1.

例 2 数值计算 $I_2=\int_0^{\pi/2}x\sin x\mathrm{d}x$,并与准确值 $I_2=1$ 比较,结果见表 2.

例 3 数值计算 $I_3=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,并与准确值 $I_3=2$ 比较,结果见表 3.

表 1 积分 I_1 计算结果

Table 1 the calculation results of integral I_1

节点数 Node number	高斯型积分结果 Results of Gaussian integral		文献[8]结果 Results of reference[8]		本文公式(7)结果 Results of fomular (7)	
	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error
1	0.377540668798	2.34×10^{-3}	0.379938868584	5.34×10^{-5}	0.379884308203	1.18×10^{-6}
2	0.379908868144	2.34×10^{-5}	0.379884619086	8.74×10^{-7}	0.379885515425	2.24×10^{-8}
3	0.379885308223	1.85×10^{-7}	0.379885501832	8.79×10^{-9}	0.379885492776	2.66×10^{-10}
4	0.379885494315	1.27×10^{-9}	0.379885492971	7.12×10^{-11}	0.379885493044	2.70×10^{-12}

表 2 积分 I_2 计算结果

Table 2 the calculation results of integral I_2

节点数 Node number	高斯型积分结果 Results of Gaussian integral		文献[8]结果 Results of reference[8]		本文公式(7)结果 Results of fomular (7)	
	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error
1	0.872358024955	1.28×10^{-1}	1.011055107221	1.11×10^{-2}	0.999733441000	2.67×10^{-4}
2	1.004834869332	4.83×10^{-3}	0.999803017678	1.97×10^{-4}	1.000002820223	2.82×10^{-6}
3	0.999957956129	4.20×10^{-5}	1.000001113479	1.11×10^{-6}	0.999999988055	1.19×10^{-8}
4	1.000000163819	1.64×10^{-7}	0.999999996780	3.22×10^{-9}	1.000000000046	4.55×10^{-10}

表 3　积分 I_3 计算结果

Table 3　the calculation results of integral I_3

节点数 Node number	高斯型积分结果 Results of Gaussian integral		文献[8]结果 Results of reference[8]		本文公式(12)结果 Results of fomular (12)	
	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error	近似值 Approximate value	绝对误差 Absolute error
1	2.467401100272	4.67×10^{-1}	1.986141435424	1.39×10^{-2}	2.000205148776	2.05×10^{-4}
2	1.993895119436	6.10×10^{-3}	2.000151700541	1.52×10^{-4}	2.000009140841	9.14×10^{-6}
3	2.000032486354	3.25×10^{-5}	1.999999381221	6.19×10^{-7}	2.000000005191	5.19×10^{-9}
4	1.999999908788	9.12×10^{-8}	2.000000001400	1.40×10^{-9}	1.999999999925	7.47×10^{-11}

4　结论

通过对高斯-勒让德求积公式余项的校正，在不增加求积节点情况下，构造出一种高精度数值积分公式. 与原 n 点高斯型积分公式相比，本文结果可提高 4 阶代数精度；与文献[8]的校正公式相比，本文结果可提高 2 阶代数精度. 与此同时，数值算例结果表明，用本文方法高精度计算定积分和二重积分可行、有效.

参考文献：

[1]　吴新元. 一个高精度数值积分公式[J]. 计算物理，1988，5(4)：473-477.
Wu X Y. A higher order accuracy numerical quadrature rule[J]. Chinese Journal of Computational Physics，1988，5(4)：473-477.

[2]　吴新元，吴宏伟. 一个新的高精度二重积分公式[J]. 计算物理，1991，8(4)：437-441.
Wu X Y，Wu H W. A new higher order accuracy numerical formula for double integral[J]. Chinese Journal of Computational Physics，1991，8(4)：437-441.

[3]　曾喆昭，王耀南. 一种高精度数值积分方法[J]. 湖南大学学报：自然科学版，2007，31(4)：43-46.
Zeng Z Z，Wang Y N. An approach of numerical integration with high accuracy[J]. Journal of Hunan University：Natural Sciences，2007，31(4)：43-46.

[4]　刘彬清. 一类高斯数值求积公式的极限性质[J]. 工程数学学报，2003，20(4)：137-139.
Liu B Q. Limit properties of a kind of Gauss numerical integral formula[J]. Journal of Engineering Mathematics，2003，20(4)：137-139.

[5]　曹丽华. 一类广义 Gauss 型求积公式[J]. 数学物理学报，2007，27A(3)：524-534.
Cao L H. Generalized Gaussian quadrature formulas[J]. Acta Mathmatic Scientia，2007，27A(3)：524-534.

[6]　Babolian E，Masjed J M，Eslahchi M R. On numerical improvement of Gauss-Legendre quadrature rules[J]. Appl Math Comput，2005，160(3)：779-789.

[7]　Mohankumar N，Sen S，Ramar R. On the evaluation of correction terms in Gauss-Legendre quadrature[J]. Comput Phys Commun，2010，181(1)：17-20.

[8]　潘克家，刘见礼，甘四清. 高斯型数值求积公式的校正[J]. 数值计算与计算机应用，2012，33(1)：17-24.
Pan K J，Liu J L，Gan S Q. Correction of Gauss quadrature formulas [J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications，2012，33(1)：17-24.

[9]　李庆扬，王能超，易大义. 数值分析 [M]. 第 5 版. 北京：清华大学出版社，2008.
Li Q Y，Wang N C，Yi D Y. Numerical analysis[M]. The Fifth Edition. Beijing：Tsinghua University Press，2008.

（责任编辑：尹　闯）