网络优先数字出版时间:2014-3-28
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140328.003.html
广西科学 Guangxi Sciences 2014,21(3):298~299,305

一类非线性时滞偏差分方程解的振动性*

Oscillation of Solutions for A class of Nonlinear Partial Difference Equations with Delay

杨继昌

YANG Ji-chang

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China)

摘要:研究非线性时滞偏差分方程 $aA_{m+1,n+1}+bA_{m+1,n}+cA_{m,n+1}-dA_{m,n}+\sum_{i=1}^{u}P_i(m,n)f_i(A_{m-k_i,n-l_i})=0$ 解的振动性,给出其解振动的充分条件.

关键词:非线性 偏差分方程 振动

中图分类号:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2014)03-0298-02

Abstract: A class of nonlinear partial difference equations with delay $aA_{m+1,n+1}+bA_{m+1,n}+cA_{m,n+1}-dA_{m,n}+\sum_{i=1}^{u}P_i(m,n)f_i(A_{m-k_i,n-l_i})=0$ is studied, and some sufficient conditions for the oscillation of this equations' solution are obtained.

Key words: nonlinear, partial difference equation, oscillation

偏差分方程是涉及 2 个以上独立变量的差分方程,如果这些独立变量是整型变量,则方程是离散型的偏微分方程,它们在随机游动问题、分子结构问题及数值差分逼近问题等方面都有重要的应用.

本文考虑非线性时滞差分方程[1]

$$aA_{m+1,n+1}+bA_{m+1,n}+cA_{m,n+1}-dA_{m,n}+\sum_{i=1}^{u}P_i(m,n)f_i(A_{m-k_i,n-l_i})=0, \qquad (1)$$

其中 a,b,c,d 为正常数,且 $a,b,c\geqslant d>0$, $P_i(m,n)\in(N_0\times N_0,R^+)$, $k_i,l_i\in N_0$, $N_t=\{t,t+1,\cdots\}$, t 为整数, f_i 是实值函数,且 $\forall x\neq 0$,并满足 $xf_i(x)>0$, $i=1,2,\cdots,u$,给出其解振动的充分条件.

方程(1)的解是对 $\forall i\geqslant\min\{-k_1,-k_2,\cdots,-k_u\}$, $\forall j\geqslant\min\{-l_1,-l_2,\cdots,-l_u\}$ 的双序列 $\{A_{i,j}\}$. 如果对充分大的 i,j 有 $A_{i,j}>0$,则方程(1)的解称为最终正解. 如果对充分大的 i,j 有 $A_{i,j}<0$,则方程(1)的解称为最终负解. 如果方程(1)的解既不是最终正解也不是最终负解,则称它是方程(1)的振动解.

1 预备知识

引理 1[2] 设 $\{A_{m,n}\}$ 是方程(1)的最终正解,则对充分大的 m,n,下列不等式成立:

$$d^kA_{m,n}\geqslant a^kA_{m+k,n+k},\ d^kA_{m,n}\geqslant b^kA_{m+k,n},\ d^kA_{m,n}\geqslant c^kA_{m,n+k}. \qquad (2)$$

引理 2 设 $\{A_{m,n}\}$ 是方程(1)的最终负解,则对充分大的 m,n,下列不等式成立:

$$d^kA_{m,n}\leqslant a^kA_{m+k,n+k},\ d^kA_{m,n}\leqslant b^kA_{m+k,n},\ d^kA_{m,n}\leqslant c^kA_{m,n+k}. \qquad (3)$$

引理 3[3] 设 $\{A_{m,n}\}$ 是方程(1)的最终正解或最终负解,则 $\lim\limits_{m,n\to\infty}A_{m,n}=0$.

证明 当 $\{A_{m,n}\}$ 为最终正解时,由引理 1 可知

收稿日期:2013-09-30
修回日期:2013-12-11
作者简介:杨继昌(1972-),男,副教授,硕士,主要从事微分方程教学与研究。
*广西高校科学技术研究项目(2013YB282)资助。

对充分大的 m,n，有

$$A_{m+1,n+1} \leqslant \frac{d}{a}A_{m,n} \leqslant A_{m,n}, A_{m+1,n} \leqslant \frac{d}{b}A_{m,n} \leqslant A_{m,n}, A_{m,n+1} \leqslant \frac{d}{c}A_{m,n} \leqslant A_{m,n}, \qquad (4)$$

从而可知当 m,n 充分大时 $\{A_{m,n}\}$ 单调递减. 又设 $\lim\limits_{m,n\to\infty} A_{m,n}=\xi$，因为 $\{A_{m,n}\}$ 为最终正解，可得 $\xi\geqslant 0$. 由方程(1)可知对充分大的 m,n，有

$$aA_{m+1,n+1}+bA_{m+1,n}+cA_{m,n+1}-dA_{m,n} = -\sum_{i=1}^{u} P_i(m,n) f_i(A_{m-k_i,n-l_i}) \leqslant 0. \qquad (5)$$

对(5)式两边取极限，可得 $(a+b)\xi \leqslant (a+b+c-d)\xi \leqslant 0$，从而 $\xi\leqslant 0$，所以 $\xi=0$.

同理可证当 $\{A_{m,n}\}$ 为最终负解时，也有 $\xi=0$ 成立. 因此 $\lim\limits_{m,n\to\infty}A_{m,n}=0$.

引理 4 对 $\forall k_0,l_0\geqslant 0$，下列等式成立：

$$\sum_{i=m}^{m+k_0}\sum_{j=n}^{n+l_0}(aA_{i+1,j+1}+bA_{i+1,j}+cA_{i,j+1}-dA_{i,j}) = \sum_{i=m+1}^{m+k_0}\sum_{j=n+1}^{n+l_0}(a+b+c-d)A_{i,j} + \sum_{i=m+1}^{m+k_0}[(a+c)A_{i,n+l_0+1}+(b-d)A_{i,n}] + \sum_{j=n+1}^{n+l_0}[(a+b)A_{m+k_0+1,j}+(c-d)A_{m,j}] + (aA_{m+k_0+1,n+l_0+1}+bA_{m+k_0+1,n}+cA_{m,n+l_0+1}-dA_{m,n}).$$

2 主要结果

定理 1 如果对 $\forall i\in[1,u]$ 有下列条件成立：

(i) $\liminf\limits_{x\to 0}\dfrac{f_i(x)}{x}=S_i\in(0,\infty)$，

(ii) $\liminf\limits_{m,n\to 0} P_i(m,n)=P_i>0$，

(iii) f_i 是非减函数，

(iv) $\sum\limits_{i=1}^{u}[P_iS_i\dfrac{(ad+2bc)^{\eta_i}(\eta_i+1)^{\eta_i+1}}{d^{2\eta_i+1}\eta_i^{\eta_i}}]>1$，其中 $\eta_i=\min\{k_i,l_i\}$.

则方程(1)的解是振动的.

证明 假设结论不成立. 设 $\{A_{m,n}\}$ 是方程(1)的最终正解，则由引理 3 可知 $\lim\limits_{m,n\to\infty}A_{m,n}=0$，再由方程(1)及引理 1 和条件(iii)可知，对充分大的 m,n，有

$$\frac{ad+2bc}{d^2}\cdot\frac{A_{m+1,n+1}}{A_{m,n}}-1 \leqslant -\sum_{i=1}^{u}[\frac{P_i(m,n)}{d}\cdot\frac{f_i(A_{m-k_i,n-l_i})}{A_{m,n}}] \leqslant -\sum_{i=1}^{u}[\frac{P_i(m,n)}{d}\cdot\frac{f_i(A_{m-\eta_i,n-\eta_i})}{A_{m-\eta_i,n-\eta_i}}]\prod_{j=1}^{\eta_i}\frac{A_{m-j,n-j}}{A_{m-(j-1),n-(j-1)}}. \qquad (6)$$

设 $\alpha_{m,n}=\dfrac{A_{m,n}}{A_{m+1,n+1}}$，则 $\alpha_{m,n}\geqslant 1$，再由(6)式可得

$$\frac{ad+2bc}{d^2}\cdot\frac{1}{\alpha_{m,n}}+\sum_{i=1}^{u}[\frac{P_i(m,n)}{d}\cdot\frac{f_i(A_{m-\eta_i,n-\eta_i})}{A_{m-\eta_i,n-\eta_i}}]\prod_{j=1}^{\eta_i}\alpha_{m-j,n-j}\leqslant 1. \qquad (7)$$

由(7)式可知 $\alpha_{m,n}$ 有界，设 $\liminf\limits_{m,n\to\infty}\alpha_{m,n}=\beta$，则(7)式可化为

$$\frac{ad+2bc}{d^2}+\alpha_{m,n}\cdot\sum_{i=1}^{u}[\frac{P_i(m,n)}{d}\cdot\frac{f_i(A_{m-\eta_i,n-\eta_i})}{A_{m-\eta_i,n-\eta_i}}]\prod_{j=1}^{\eta_i}\alpha_{m-j,n-j}\leqslant\alpha_{m,n}, \qquad (8)$$

又对(8)式两边取下极限可得

$$\frac{ad+2bc}{d^2}+\sum_{i=1}^{u}(\frac{P_i}{d}S_i\beta^{\eta_i+1})\leqslant\beta, \qquad (9)$$

由(9)式可知 $\beta>\dfrac{ad+2bc}{d^2}$，且有

$$\sum_{i=1}^{u}(\frac{P_i}{d}S_i\beta^{\eta_i+1})\cdot\frac{1}{\beta-\frac{ad+2bc}{d^2}}\leqslant 1,$$

而

$$\min_{\beta>\frac{ad+2bc}{d^2}}\frac{\beta^{\eta_i+1}}{\beta-\frac{ad+2bc}{d^2}} = (\frac{ad+2bc}{d^2})^{\eta_i}\frac{(\eta_i+1)^{\eta_i+1}}{\eta_i^{\eta_i}},$$

因而

$$\sum_{i=1}^{u}[P_iS_i\frac{(ad+2bc)^{\eta_i}}{d^2\eta_{i+1}}\frac{(\eta_i+1)^{\eta_i+1}}{\eta_i^{\eta_i}}]\leqslant 1,$$

与条件(iv)矛盾，所以 $\{A_{m,n}\}$ 不是方程(1)的最终正解. 同理可证明 $\{A_{m,n}\}$ 也不是方程(1)的最终负解.

因此，方程(1)的解是振动的.

定理 2 如果对 $\forall i\in[1,u]$ 有下列条件成立：

(i) $\liminf\limits_{x\to 0}\dfrac{f_i(x)}{x}=S_i\in(0,\infty)$，

(ii) f_i 是非减函数，

(iii) $\limsup\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{t=1}^{u}S_t\sum\limits_{i=m}^{m+k_0}\sum\limits_{j=n}^{n+l_0}P_t(i,j)>0$，其中 $k_0=\min\{k_1,k_2,\cdots,k_u\}$，$l_0=\min\{l_1,l_2,\cdots,l_u\}$.

则方程(1)的所有解是振动的.

证明 假设结论不成立. 设 $\{A_{m,n}\}$ 是方程(1)的最终正解，则 $\lim\limits_{m,n\to\infty}A_{m,n}=0$. 由引理 4 可知

$$\sum_{i=m}^{m+k_0}\sum_{j=n}^{n+l_0}\sum_{t=1}^{u}P_t(i,j)f_t(A_{i-k_t,j-l_t})\leqslant dA_{m,n}.$$

又由条件(ii)可知

$$dA_{m,n}\geqslant\sum_{i=m}^{m+k_0}\sum_{j=n}^{n+l_0}\sum_{t=1}^{u}P_t(i,j)f_t(A_{m,n}),$$

(下转第 305 页 Continue on page 305)

业,2012,33(12):52-54.

Wang Y. Development of the compound-type fermented dietary fiber duck meat[J]. Journal of Food Industry, 2012,33(12):52-54.

[4] 韦泽平,文明,彭承沂.生活要素对黄曲条跳甲作用地位的模糊推断[J].广西科学,1997,4(1):27-31.

Wei Z P, Wen M, Peng C Q. Fuzzy inference of the role of essential life factors on phyllotrela striolata[J]. Guangxi Sciences, 1997,4(1):27-31.

[5] 顾伟钢,彭燕,张进杰,等.模糊数学综合评判法在炖煮猪肉工艺优化中的应用[J].浙江大学学报:农业与生命科学版,2011,37(5):573-577.

Gu W G, Peng Y, Zhang J J, et al. Application of fuzzy mathematic evaluation in the optimization of stewed pork processing[J]. Journal of Zhejiang University: Agric and Life Sci, 2011,37(5):573-577.

[6] 张民,张丽丽,董家美,等.模糊数学综合评判法在黑蒜酱研制中的应用[J].食品工业,2013,34(3):40-42.

Zhang M, Zhang L L, Dong J M, et al. Application of fuzzy math comprehensive evaluation in preparation of black garlic jam[J]. Journal of Food Industry, 2013, 34(3):40-42.

[7] 魏永义,豆康宁,邓玉杰.饼干感官评价研究[J].粮油加工与农业机械,2011,10:116-117.

Wei Y Y, Dou K N, Deng Y J. Study on evaluation of biscuit sensory[J]. Journal of Grain and Oil Processing and Agricultural Machinery, 2011,10:116-117.

[8] 高瑞鹤,何俊萍.应用模糊数学法评判韭菜酱的发酵成熟时间[J].中国酿造,2013,32(1):127-130.

Gao R H, He J P. Application of fuzzy mathematical method to determine the leek sauce fermentation maturity time[J]. China Brewing, 2013,32(1):127-130.

(责任编辑:尹　闯)

(上接第 299 页 Continue from page 299)

或者写成

$$\sum_{i=m}^{m+k_0}\sum_{j=n}^{n+l_0}\sum_{t=1}^{u}P_t(i,j)\,\frac{f_t(A_{m,n})}{A_{m,n}}\leqslant d.$$

对上式取极限可得 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sup\sum\limits_{t=1}^{u}S_t\sum\limits_{i=m}^{m+k_0}\sum\limits_{j=n}^{n+l_0}P_t(i,j)\leqslant d$,与条件(iii)矛盾,所以 $\{A_{m,n}\}$ 不是方程(1)的最终正解.同理可证明 $\{A_{m,n}\}$ 也不是方程(1)的最终负解.

因此,方程(1)的所有解是振动的.

参考文献:

[1] Kelley W G, Peterson A C. Difference equation[M]. New York: Academic Press, 1991.

[2] Zhang B G, Liu S T. On the oscillation of two partial difference equations[J]. Math Anal Appl, 1997, 206(2):489-492.

[3] Zhang B G, Tian C J. Oscillation criteria of a class of partial difference equations with delay[J]. Computers Math Applic, 2004,48(2):291-303.

(责任编辑:尹　闯)