广西科学 Guangxi Sciences 2015,22(1):109～112

网络优先数字出版时间:2015-01-26

网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/45.1206.G3.20150126.1547.003.html

低能跑动耦合常数形式对低能常数的影响*

The Form of the Low-energy Coupling Constant and Its Influence on the Low-energy Constants

陈清森,蒋绍周**

CHEN Qing-sen,JIANG Shao-zhou

(**广西大学物理学院,广西大学-国家天文台天体物理和空间科学研究中心,广西南宁** 530004)

(Department of Physics,GXU-NAOC Center for Astrophysics and Space Sciences,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:【目的】探寻一种理论值与实验值接近的低能跑动耦合常数的形式,比较几种低能跑动耦合常数形式对低能常数的影响。【方法】选取3种低能跑动耦合常数的形式及其变形,利用已有的耦合常数和低能常数的关系,数值计算出低能常数并与实验值作比较。【结果】发现1种与实验符合的低能跑动耦合常数的可能形式,并给出低能常数新的理论预言值。【结论】对于跑动耦合常数低能部分是一个平台的情况,无论其二阶导数是否连续,数值结果对低能常数的影响均较小,并且绝对值都系统地偏大;对于给出的低能耦合常数不是平台的形式,可以通过对参数的调节使得计算的低能常数与实验结果相符。

关键词:跑动耦合常数　低能常数　夸克自能

中图分类号:O412.3　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2015)01-0109-04

Abstract:**【Objective】**The forms of the low-energy running coupling constant (LERCC) were explored in existing papers,and their influences on the low-energy constants (LECs) were compared.**【Methods】**Three kinds of the forms of LERCC and their modifications were selected. The LECs were calculated according to the relationship between LERCC and LECs, and the calculated values were compared with the experimental ones.**【Results】**We get a possible form of the LERCC,which consists with the experimental data. We also give the new theoretical values of the LECs.**【Conclusion】**When the LERCC is a platform,regardless of whether the second order derivative of LERCC is continuous or not,the influences of LECs numerical results seem small,and the absolute values are systematically larger than the experimental values. When the LERCC is not a platform,we can adjust the parameters to make calculated LECs consistent with the experimental values.

Key words:running coupling constants,low-energy constants,quark self-energy

DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.20150126.003

收稿日期:2014-06-10

修回日期:2014-08-10

作者简介:陈清森(1990-),男,硕士研究生,主要从事粒子物理理论研究。

*国家自然科学基金项目(11205034)和广西自然科学基金项目(2013GXNSFBA019012)资助。

**通讯作者:蒋绍周(1982-),男,博士,副教授,硕士研究生导师,主要从事粒子物理理论研究。

0　引言

【研究意义】自然界存在四种相互作用,作用的强弱用耦合常数来描述。耦合常数会随着动量标度的改变而改变,又称为跑动耦合常数。对于强相互作用,跑动耦合常数随着动量标度的增加而减小,称为强相互作用的渐进自由效应[1,2]。对于高能端,理论上已经给出跑动耦合常数到四圈图的结果[3,4]。然而由于强相互作用在低能端耦合常数比较大,不能使用传统的微扰理论计算,需要采用其他方法近似计

算。赝标介子的手征微扰理论就是其中的一种[5~7]，用于描述低能赝标介子的强相互作用。但是理论本身并不能给出赝标介子手征有效拉氏量的系数(称为低能常数)。从量子色动力学的第一原理出发,可以得到夸克自能和低能常数的关系,而夸克自能可以由耦合常数通过 Schwinger-Dyson 方程给出[8,9]。如此,可以将跑动耦合常数与低能常数联系起来,将低能常数的结果作为低能跑动耦合常数是否符合实验的一个判据。这还可以推测低能耦合常数的变化行为,并给出低能常数的理论预言值。【前人研究进展】通过理论计算或者对实验数据的拟合,已经得到了几种低能耦合常数的形式[10,11]。低能常数与夸克自能的关系、夸克自能与耦合常数的关系都已有一定精度下的理论结果[8,9]。通过耦合常数求低能常数的方法已经被广泛采用。【本研究切入点】与通常的做法相反,通过比较低能常数理论结果与实验值的符合程度,可以对低能耦合常数进行预测。【拟解决的关键问题】研究低能耦合常数的变化行为、连续性、光滑性对低能常数的影响。

1 低能跑动耦合常数的形式

计算低能常数采用的耦合常数形式由文献[10]给出,是一种分段形式:

$$\alpha_s(p^2)=\frac{12\pi}{11N_c-2N_f}\times$$
$$\begin{cases}a,\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2)\leqslant c,\\ a-b(-c+\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2))^2,c\leqslant\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2)\leqslant d,\\ 1/\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2),d\leqslant\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2)。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a=7,b=0.8,c=-2,d=0.5$。这种形式的特点是耦合常数的低能端是一个平台,传统的计算大都采用这样的假设。

由于后文将要进行夸克自能和低能常数的计算需要跑动耦合常数的一阶和二阶导数连续,但(1)式给出的耦合常数只到一阶导数连续,二阶导数不连续,可能会对低能常数的计算结果产生影响(文献[9]中计算结果的绝对值偏大)。简单的方法是修改(1)式中第二段的形式使 $\alpha_s(p^2)$ 的二阶导数连续。由于耦合常数的低能行为还不清楚,故采用不同于文献[10]猜测的另外一种连接方式也是合理的。计算发现,调节参数 a、b、c、d 和指数都不能使其二阶导数连续。因此把第二段修改成

$$a-b_1(-c+\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2))^{n_1}-b_2(-c+\ln(p^2/\Lambda_{QCD}^2))^{n_2}。\tag{2}$$

将 c、d、n_1 和 n_2 作为参数,a、b_1 和 b_2 可通过各段边界的二阶导数连续来确定。

此外,文献[10]相对较早,故参考最近的文献[11]的(2)式,通过格点计算胶子传播子的形式。在 Hartree-Fock 近似下胶子传播子 $G_{\mu\nu}(p)$ 和耦合常数具有关系:

$$\alpha_s(p^2)=\frac{g^2}{12\pi}g^{\mu\nu}p^2G_{\mu\nu}(p)。\tag{3}$$

由此得到的耦合常数形式:

$$\alpha_s(p^2)=\alpha_0p^2\frac{p^2+M^2}{p^4+(M^2+m^2)p^2+\lambda^4},\tag{4}$$

其中 M^2、M^2+m^2 和 λ^4 的值分别为 4.303 GeV^2、0.526 GeV^2 和 0.4929 GeV^4,α_0 为一个常数,在计算过程中作为可调参数。但(4)式给出的耦合常数的渐近行为与一圈图的计算结果不一致,这是因为此耦合常数的形式只考虑胶子传播子的贡献。由于本文只关注耦合常数低能端的行为,高能端的行为只要求对计算结果影响不大即可。后文的计算表明,保留 3 位有效位数时,不论是(1)式、(2)式还是(4)式给出的耦合常数,高能端的行为都不会对低能常数的计算产生影响(低能常数主要是由低能的耦合常数贡献)。综上分析,我们可以通过低能常数反过来研究耦合常数的低能行为。

2 计算结果及分析

基于跑动耦合常数的形式,通过 Schwinger-Dyson 方程得到夸克自能 $\Sigma(p^2)$。我们采用文献[8]中的角近似方法得到夸克自能所满足的微分方程及边界条件:

$$(\frac{\alpha(x)}{x})'\Sigma''(x)-(\frac{\alpha(x)}{x})''\Sigma'(x)-\frac{3C_2(R)}{4\pi}\cdot\frac{x\Sigma(x)}{x+\Sigma^2(x)}(\frac{\alpha(x)}{x})'^2=0,\tag{5}$$

$$\Sigma'(0)=-\frac{3C_2(R)\alpha(0)}{8\pi\Sigma(0)},\tag{6}$$

$$\Sigma(\Lambda')-\frac{3C_2(R)\alpha(\Lambda')}{4\pi\Lambda'}\int_0^{\Lambda'}\mathrm{d}x\frac{x\Sigma(x)}{x+\Sigma^2(x)}=0,\tag{7}$$

其中 $x=p^2$,Λ' 是积分截断,这里取 $\Lambda'=(10^3\Lambda_{\mathrm{QCD}})^2$,$\Lambda_{\mathrm{QCD}}$ 可通过 p^2 阶的低能常数 F_0 来决定,并取 $F_0=87$ MeV(见文献[9])。文献[8]中的(35)和(36)式已给出由自能 $\Sigma(p^2)$ 及其导数表示的到 p^4 阶的低能常数。计算过程中取夸克的颜色 N_c 和味道 N_f 均为 3,二阶 Casmir 算子 $C_2(R)$ 在大 N_c 近似下取为 $N_c/2$。通过(5)~(7)式算出夸克自能,并代入低能常数的解析表达式中,即可得到低能常数的数值结果。为了与实验结果作对比,将文献[12]给出的低能常数实验值列在表 1 中。

首先改变(1)式中的各个参数，研究这些参数对低能常数的影响。计算的结果列见表 2，其中第 2 行是文献[9]的结果。从表 2 中的结果可以看出，平台高度(a)，左右边界范围(c、d)以及低能平台高度和高能渐近行为的衔接方式(b)的改变对低能常数影响都不大。可见，采用这种类型的耦合常数，低能常数对耦合常数的细节并不敏感，计算过程中允许耦合常数出现较大的偏差，计算结果的稳定性高。但对比表 1 和表 2 可以看出，低能常数结果的绝对值都偏大。因此，我们猜测跑动耦合常数的低能部分可能不是平台，或者这是由于二阶导数不连续产生的。

为了研究二阶导数连续性的影响，将(1)式中间段的衔接部分改为(2)式，计算结果见表 3。为了便于和原来的结果[9]进行比较，计算过程不改变 c 和 d 的取值，只改变 n_1，n_2 的取值。从表 3 不难看出，n_1，n_2 的改变对低能常数的影响也不大。因此计算偏差不是由于二阶导数不连续引起的，也不是由于连接方式造成的。

以上的计算结果均不支持耦合常数的低能端是一个平台的说法，因此我们尝试采用最新的耦合常数形式(4)式。这种形式的耦合常数的低能端不是平台，而且是无穷阶导数连续的，与(1)、(2)式给出的耦合常数有很大的区别。计算过程中需要把 Λ_{QCD} 的数值作为输入参数，文献[13，14]给出的结果均在 0.250 GeV 左右。为了计算方便，下面的计算均取 $\Lambda_{QCD}=0.250$ GeV。这种耦合常数下的低能常数的数值结果列于表 4。

从表 4 中可以看出，低能常数受 α_0 的影响比较大。当 α_0 较大时低能常数甚至会反号，我们可以通过这个性质将 α_0 确定下来。由于 $\alpha_0<0.515$ 时计算结果不自洽，故未将其列出。从表 4 中还可以看出，当 $\alpha_0=0.52$ 时可以得到与实验较为接近的数值结果。这时 α_s (1.5 GeV)＝0.39，与文献[15]给出的结果 α_s (1.5 GeV)＝0.32 相符。因此，我们猜测耦合常数低能端可能与(4)式较为接近，可以将 $\alpha_0=0.52$ 对应的数值结果作为我们对低能常数新的理论预言值。

表 1　低能常数的实验值

Table 1　The experimental values of the low-energy constants

10^3L_1	10^3L_2	10^3L_3	10^3L_4	10^3L_5
0.4±0.3	1.4±0.3	−3.5±1.1	−0.3±0.5	1.4±0.5
10^3L_6	10^3L_7	10^3L_8	10^3L_9	10^3L_{10}
−0.2±0.3	−0.4±0.2	0.9±0.3	6.9±0.7	−5.5±0.7

同时本文也对自能函数的导数对低能常数的影响做了研究。通过计算发现，对于低能行为采用(1)

表 2　二阶导数不连续的耦合常数对低能常数的影响

Table 2　The influence of the coupling constant without two order derivative continuation on the low-energy constants

a	b	c	d	10^3L_1	10^3L_2	10^3L_3	10^3L_4	10^3L_5	10^3L_6	10^3L_7	10^3L_8	10^3L_9	10^3L_{10}
7	0.8	−2	0.5	1.23	2.46	−6.87	0	1.48	0	−0.51	1.02	8.88	−7.41
4	0.8	−2	0.5	1.09	2.18	−5.93	0	1.57	0	−0.52	1.03	7.84	−6.49
15	0.8	−2	0.5	1.45	2.90	−8.22	0	1.49	0	−0.50	1.04	10.41	−8.29
7	0.4	−2	0.5	1.24	2.47	−6.90	0	1.48	0	−0.51	1.02	8.90	−7.42
7	1.5	−2	0.5	1.23	2.46	−6.86	0	1.48	0	−0.51	1.03	8.88	−7.43
7	0.8	−3	0.5	1.17	2.34	−6.44	0	1.53	0	−0.52	1.04	8.43	−7.04
7	0.8	−1	0.5	1.27	2.55	−7.13	0	1.47	0	−0.51	1.02	9.15	−7.56
7	0.8	−2	0.3	1.26	2.52	−7.08	0	1.41	0	−0.53	1.03	9.15	−7.83
7	0.8	−2	1.5	1.14	2.28	−6.24	0	1.61	0	−0.48	1.00	8.20	−6.62

表 3　二阶导数连续的耦合常数对低能常数的影响

Table 3　The influence of the coupling constant with two order derivative continuation on the low-energy constants

n_1	n_2	10^3L_1	10^3L_2	10^3L_3	10^3L_4	10^3L_5	10^3L_6	10^3L_7	10^3L_8	10^3L_9	10^3L_{10}
3	4	1.43	2.86	−8.11	0	1.44	0	−0.51	1.05	10.33	−8.48
4	5	1.40	2.80	−7.93	0	1.44	0	−0.52	1.05	10.09	−8.27
5	6	1.37	2.74	−7.73	0	1.44	0	−0.51	1.04	9.85	−8.08
6	7	1.34	2.68	−7.55	0	1.43	0	−0.51	1.03	9.62	−7.91

表 4　无穷阶导数连续的耦合常数对低能常数的影响

Table 4　The influence of the coupling constant with infinity order derivative continuation on the low-energy constants

α_0	10^3L_1	10^3L_2	10^3L_3	10^3L_4	10^3L_5	10^3L_6	10^3L_7	10^3L_8	10^3L_9	10^3L_{10}
0.515	0.79	1.58	−3.39	0	1.75	0	−0.21	0.50	6.04	−3.38
0.52	0.79	1.58	−3.43	0	2.14	0	−0.37	0.85	5.94	−3.29
0.53	0.79	1.57	−3.55	0	2.19	0	−0.54	1.03	5.66	−3.11
0.55	0.78	1.55	−3.78	0	1.42	0	−0.66	0.78	5.06	−2.73
0.60	0.72	1.45	−3.98	0	−0.63	0	−0.62	−0.19	3.78	−1.96
0.70	0.56	1.11	−3.44	0	−2.13	0	−0.38	−0.97	2.18	−1.01

表 5　自能的导数对低能常数的影响结果

Table 5　Influence of self-energy derivative on the low-energy constants

$\alpha_0=0.52$	10^3L_1	10^3L_2	10^3L_3	10^3L_4	10^3L_5	10^3L_6	10^3L_7	10^3L_8	10^3L_9	10^3L_{10}
$\Sigma',\Sigma''\neq 0$	0.79	1.58	−3.43	0	2.14	0	−0.37	0.85	5.94	−3.29
$\Sigma'=0,\Sigma''\neq 0$	0.76	1.52	−3.27	0	2.14	0	−0.32	0.68	5.69	−3.00
$\Sigma'\neq 0,\Sigma''=0$	0.79	1.59	−3.46	0	2.15	0	−0.38	0.85	5.96	−3.32
$\Sigma'=\Sigma''=0$	0.77	1.54	−3.32	0	2.15	0	−0.32	0.68	5.76	−3.07

式和(2)式平台的形式时,忽略自能的导数项对结果影响较大。而对于(4)式的无穷阶导数连续的形式,我们将计算结果列于表 5 中,其中 α_0 取成 0.52。从表 5 可以看出,自能的一、二阶导数对低能常数(除了 L_8)的计算结果没有较大的影响。

3　结论

本文探索 3 种跑动耦合常数的形式对低能常数的影响,发现对于跑动耦合常数低能部分是一个平台的情况,无论其二阶导数是否连续,数值结果对低能常数的影响均较小,并且绝对值都系统地偏大;对于给出的低能耦合常数不是平台的形式,可以通过对参数的调节使得计算的低能常数与实验结果相符。故猜测跑动耦合常数的形式与(4)式接近,并将表 4 中 $\alpha_0=0.52$ 的结果作为低能常数的理论预言值。在对自能和低能常数的解析计算过程中实际上都作了一定的近似,所以解析表达式可能会有较大误差。但数值计算过程中的输入参数很少,只有 F_0 和 $\Lambda_{\rm QCD}$,因此理论有较高的预言性。特别是理论预言与实验精度比较高的实验结果相符合,所以可以反过来给出实验误差较大的低能常数相对精确的理论预言。

参考文献:

[1]　Gross D J,Wilczek F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories [J]. Physical Review Letter,1973,30:1343-1346.

[2]　Politzerh H D. Reliable perturbative results for strong interactions?[J]. Physical Review Letter,1973,30:1346-1349.

[3]　van Ritbergen T,Vermaseren J A M,Larin S A. The four-loop β-function in quantum chromodynamics[J]. Physics Letter B,1997,400:379-384.

[4]　Czakon M. The four-loop QCD β-function and anomalous dimensions [J]. Nuclear Physics B,2005,710:485-498.

[5]　Weinberg S. Phenomenological lagrangians[J]. Physica A,1979,96:327-340.

[6]　Gasser J,Leutwyler H. Chiral perturbation theory to one loop[J]. Annals of Physic,1984,158:142-210.

[7]　Gasser J,Leutwyler H. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strangequark [J]. Nuclear Physics B,1985,250:465-516.

[8]　Yang H,Wang Q,Kuang Y P,et al. Calculation of the chiral lagrangian coefficients from the underlying theory of QCD: A simple approach [J]. Physical Review D,2002,66:014019.

[9]　Jiang S Z,Zhang Y,Li C,et al. Computation of the p^6 order chiral lagrangian coefficients[J]. Physical Review D,2010,81:014001.

[10]　Aoki K I,Bando M,Kugo T. Calculating the decay constant f_π [J]. Progress of Theoretical Physics,1990,84(4):683-701.

[11]　David D,Oliveira O,Rodriguez-Quintero J. Non-trivial ghost-gluon vertex and the match of the RGZ,DSE and lattice yang-mills propagators[J]. Physical Review D,2012,86(10):105005.

[12]　Pich A. Low-energy constants from resonance chiral theory[J]. PoS Confinement,2008(8):026.

[13]　Gockeler M,Horsley R,Irving A C,et al. Determination of the Lambda parameter from full lattice QCD [J]. Physical Review D,2006,73:014513.

[14]　Kneur J L,Neveu A. $\Lambda_{\overline{MS}}^{QCD}$ from renormalization group optimized perturbation[J]. Physical Review D,2012,85:014005.

[15]　Pich A. Review of α_s determinations[J]. PoS Confinement,2012(X):022.

(责任编辑:尹　闯)