网络优先数字出版时间:2014-05-04
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140504.004.html

带有流动性的模糊投资组合优化模型*
Fuzzy Portfolio Optimization Model with Liquidity

陈　宁,李晓清,韦增欣**
CHEN Ning, LI Xiao-qing, WEI Zeng-xin

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004)
(Mathematics and Information Technology Department, Guangxi University, Nanning,Guangxi, 530004,China)

摘要:用三角模糊数描述证券的收益率,同时基于流动性与证券收益之间存在的负相关关系,设置流动性的效用函数,从而建立一种考虑流动性的多目标投资组合优化模型,再将多目标模型转化为单目标模型,用 Lagrange 乘子法求解并进行数值试验.

关键词:投资组合模型　流动性　三角模糊数　有效边界
中图分类号:F224.9　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2015)02-0216-04

Abstract: This paper builds a multi-objective functions model with possibilistic mean, possibilistic covariance and liquidity based on the negative correlation between stocks' liquidity and their returns. Lagrange multiplier method is used to solve the problem after transform of the multi-objective functions model into a single objective function model, and numerical experiment is given at last.

Key words: portfolio model, liquidity, triangular fuzzy number, efficient boundary

0　引言

1952 年,Markowitz[1] 在假设投资者在厌恶风险的条件下用方差来度量投资风险,建立了均值-方差投资组合选择模型.然而在现实证券市场中,大量的随机和非随机不确定因素的存在使得利用概率中的均值和方差来表示证券的收益率并不确切.模糊数可以对证券市场中的模糊因素进行定量分析,为证券投资组合模型的研究开拓了一个新的领域,一些学者开始研究模糊理论在投资组合模型中的应用并取得部分成果.Tanaka 等[2] 利用梯形模糊数刻画证券收益率,建立了可能性分布的投资组合模型.曾建华等[3] 对清晰和模糊两种情况下的组合投资问题进行研究,将投资者的主观意见加入模糊组合投资模型中,并且利用模糊决策理论将非线性目标函数或者含有非线性约束的优化模型转化为线性规划问题并分析其差异.随后,陈国华等[4] 考虑预期收益为模糊数的投资组合选择问题,利用模糊约束简化方差约束,建立了投资组合选择的模糊线性规划模型.另外,证券的流动性[5,6] 也是投资决策过程的重要因素,因为任何投资者在进行证券投资时,只要资产所有权发生变化流动性风险就会相伴而来.早在 1986 年,Amihud 和 Mendelson[7] 就提出流动性是影响股票收益的一个重要因素,并得到股票收益与非流动性之间存在正相关关系的结论;而且他们在不同的流动性度量指标下,发现市场的流动性与收益率之间存在显著的时间序列相关性,证券流动性的增加将伴随着收益率的下降.之后还有很多学者对证券市场的流动性进行了研

收稿日期:2014-04-28
修回日期:2014-05-10
作者简介:陈　宁(1988-),女,硕士研究生,主要从事金融市场投资理论与技术分析研究。
*国家自然科学基金项目(11161003)资助。
**韦增欣(1962-),男,教授,主要从事优化与管理及金融市场投资理论与技术分析研究。

究[8~17]，构建了新的流动性度量方法并且通过对不同证券市场的历史交易数据进行分析证明了类似的结论.

本文根据证券收益率的历史分布情况，利用三角模糊数对其进行刻画，并且在此基础之上选取证券的可能性均值和可能性方差来度量投资组合的收益和风险. 再针对流动性与收益率之间的负相关关系，在可能性均值-可能性方差模型中增加流动性的效用函数，建立带有流动性的多目标模糊投资组合优化模型. 最后通过数值实验证明模型的可行性，给出不同偏好因子对下的最优投资比例，并且分析不同的风险偏好参数以及资产组合流动性偏好参数对最优投资决策的影响.

1 模糊收益率的表示

对于证券市场中的风险资产，考虑证券市场中的各种不确定因素，用三角模糊数来刻画其收益率. 若第 i 种风险资产的收益率 $\tilde{r}_i$ 是三角模糊数时，则该收益率可表示为 $\tilde{r}_i=(r_i,\alpha_i,\beta_i)$ ，其中 r_i 是中心，α_i 是左宽度，β_i 是右宽度，且该收益率的隶属函数为

$$\tilde{r}_i(x)=\begin{cases}1-\dfrac{r_i-x}{\alpha_i}, r_i-\alpha_i\leqslant x<r_i,\\ 1, x=r_i,\\ 1-\dfrac{x-r_i}{\beta_i}, r_i<x\leqslant r_i+\beta_i,\\ 0, \text{其他},\end{cases} \tag{1}$$

则 $\tilde{r}_i$ 的 λ 截集为

$$(\tilde{r}_i)_\lambda=[r_i-(1-\lambda)\alpha_i, r_i+(1-\lambda)\beta_i], \lambda\in[0,1], \tag{2}$$

可能性均值为

$$M(\tilde{r}_i)=\int_0^1\lambda[r_i-(1-\lambda)\alpha_i+r_i+(1-\lambda)\beta_i]\mathrm{d}\lambda=r_i+\frac{\beta_i-\alpha_i}{6}, \tag{3}$$

可能性方差为

$$\mathrm{Var}(\tilde{r}_i)=\int_0^1\lambda\{[r_i-(1-\lambda)\alpha_i-M(\tilde{r}_i)]^2+[r_i+(1-\lambda)\beta_i-M(\tilde{r}_i)]^2\mathrm{d}\lambda=\int_0^1\lambda\{(1-\lambda)^2(\alpha_i^2+\beta_i^2)-\frac{1}{3}(1-\lambda)(\beta_i-\alpha_i)^2+\frac{1}{18}(\beta_i-\alpha_i)^2\}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{18}(\alpha_i^2+\beta_i^2+\alpha_i\beta_i), \tag{4}$$

$\tilde{r}_i,\tilde{r}_j$ 的可能性协方差为

$$\mathrm{Cov}(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j)=\frac{1}{18}(\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j)+\frac{1}{36}(\alpha_i\beta_j+\alpha_j\beta_i). \tag{5}$$

对于投资组合 $i=1,2,\cdots,n$ ，x_i 为第 i 种资产的投资比例，则投资组合的模糊收益率 $\tilde{R}=\sum_{i=1}^n x_i\tilde{r}_i$ 的可能性均值为

$$M(\tilde{R})=\sum_{i=1}^n x_iM(\tilde{r}_i)=\sum_{i=1}^n x_i(r_i+\frac{\beta_i-\alpha_i}{6}), \tag{6}$$

可能性方差为

$$\mathrm{Var}(\tilde{R})=\sum_{i=1}^n x_i^2\mathrm{Var}(\tilde{r}_i)+2\sum_{i>j=1}^n x_ix_j\mathrm{Cov}(\tilde{r}_i,\tilde{r}_j)=\frac{1}{18}\sum_{i=1}^n x_i^2(\alpha_i^2+\beta_i^2+\alpha_i\beta_i)+2\sum_{i>j=1}^n x_ix_j(\frac{1}{18}\alpha_i\alpha_j+\frac{1}{18}\beta_i\beta_j+\frac{1}{36}\alpha_i\beta_j+\frac{1}{36}\alpha_j\beta_i)=\frac{1}{18}[(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i)^2+(\sum_{i=1}^n x_i\beta_i)^2+\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\sum_{i=1}^n x_i\beta_i]. \tag{7}$$

2 模型建立及求解

假设证券市场是无摩擦的，而且理性投资者在不允许卖空的情况下投资 n 种风险资产. 用 $l_i,i=1,2,\cdots,n$ 表示第 i 种资产的流动性，则资产组合的流动性可以表示为 $L=\sum_{i=1}^n x_il_i$. 由于证券收益与流动性之间存在负相关关系，所以将投资组合的流动性极小化，建立如下的投资组合优化模型 $P1$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Max}\ M(\tilde{R})=\sum_{i=1}^n x_i(r_i+\frac{\beta_i-\alpha_i}{6}),\\ &\mathrm{Min}\ L+\mathrm{Var}(\tilde{R})=\sum_{i=1}^n x_il_i+\frac{1}{18}[(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i)^2+(\sum_{i=1}^n x_i\beta_i)^2+\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\sum_{i=1}^n x_i\beta_i],\\ &\mathrm{s.t.}\ \sum_{i=1}^n x_i=1,\\ &x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n.\end{aligned} \tag{8}$$

下面令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $l=(l_1,l_2,\cdots,l_n)^{\mathrm{T}}$, $r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$, $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$, $A=r-\frac{\beta-\alpha}{6}$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^{\mathrm{T}}$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^{\mathrm{T}}$,

$$B=\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(\tilde{r}_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(\tilde{r}_1,\tilde{r}_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathrm{Cov}(\tilde{r}_n,\tilde{r}_1) & \cdots & \mathrm{Var}(\tilde{r}_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{18}(\alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_1\beta_1) & \cdots & \frac{1}{18}(\alpha_1\alpha_n+\beta_1\beta_n)+\frac{1}{36}(\alpha_1\beta_n+\alpha_n\beta_1)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{18}(\alpha_n\alpha_1+\beta_n\beta_1)+\frac{1}{36}(\alpha_n\beta_1+\alpha_1\beta_n) & \cdots & \frac{1}{18}(\alpha_n^2+\beta_n^2+\alpha_n\beta_n)\end{pmatrix},$$

则 $P1$ 转化为矩阵形式,记为 $P2$

$$\begin{aligned}&\text{Max } M(\widetilde{R})=x^{\mathrm{T}}A,\\&\text{Min } L+\operatorname{Var}(\widetilde{R})=x^{\mathrm{T}}l+x^{\mathrm{T}}Bx,\\&\text{s.t. } x^{\mathrm{T}}e=1,\\&x\geqslant 0.\end{aligned}\tag{9}$$

引入权重因子 $w_i,i=1,2,w_i\in[0,1]$,将上述多目标模型转化为单目标模型 $P3$

$$\begin{aligned}&\text{Min } w_1x^{\mathrm{T}}l+w_2x^{\mathrm{T}}Bx-(1-w_2-w_2)x^{\mathrm{T}}A\\&\text{s.t. } x^{\mathrm{T}}e=1,\\&x\geqslant 0.\end{aligned}\tag{10}$$

其中 w_1 是流动性偏好因子,w_2 是可能性方差偏好因子.对此单目标模型,用 Lagrange 乘子法进行求解:

$$H=w_1x^{\mathrm{T}}l+w_2x^{\mathrm{T}}Bx-(1-w_2-w_2)x^{\mathrm{T}}A+\lambda(x^{\mathrm{T}}e-1),\tag{11}$$

对 H 求一阶偏导,并令它们都等于 0,则有

$$\frac{\partial H}{\partial x}=w_1l+2w_2Bx+(w_1+w_2-1)A+\lambda e=0,\tag{12}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=e^{\mathrm{T}}x-1=0,\tag{13}$$

由式(12)得

$$x=\frac{B^{-1}}{2w_2}[(1-w_1-w_2)A-w_1l-\lambda e],\tag{14}$$

将式(14)代入式(13)得

$$\lambda=\frac{(1-w_1-w_2)e^{\mathrm{T}}B^{-1}A-w_1e^{\mathrm{T}}B^{-1}l-2w_2}{e^{\mathrm{T}}B^{-1}e},\tag{15}$$

将式(15)代入式(14)得

$$x=\frac{B^{-1}}{2w_2}\left[(1-w_1-w_2)A-w_1l-\frac{(1-w_1-w_2)e^{\mathrm{T}}B^{-1}A-w_1e^{\mathrm{T}}B^{-1}l-2w_2}{e^{\mathrm{T}}B^{-1}e}\cdot e\right],\tag{16}$$

即得到模型 $P3$ 的最优解.

3 数值试验

选择代码为 002022,600432,601888 的 3 只股票从 2012 年 1 月至 2013 年 1 月的交易数据为试验样本数据.股票的日转手率在交易数据中已经包含的,计算简便;而且用转手率表示流动性可以与收益率保持在同一数量级,使模型有意义,故流动性选择以月转手率来度量.

模糊收益率的计算按:分别以 $O_{it},H_{it},L_{it},C_{it}$,$i=1,2,3,t=1,2,\cdots,12$ 表示第 i 只股票第 t 个月中首个交易日的开盘价格,第 t 个月中的最高、最低交易价格,第 t 个月最后一个交易日的收盘价格.则第 i 只股票第 t 个月的收益率可以用三角模糊数 $\tilde{r}_{it}=(r_{it},\alpha_{it},\beta_{it})$ 来表示,其中 $r_{it}=\frac{C_{it}-O_{it}}{O_{it}}100\%$,$m_{it}=\frac{H_{it}-O_{it}}{O_{it}}100\%$,$n_{it}=\frac{L_{it}-O_{it}}{O_{it}}100\%$,$\alpha_{it}=r_{it}-n_{it}$,$\beta_{it}=m_{it}-r_{it}$,于是第 i 只股票的预期模糊收益率可以表示为 $\tilde{r}_i=\frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12}\tilde{r}_{it}$.3 只股票的基本情况见表 1 和表 2.

表 1 3 只股票的模糊收益率、可能性均值、月转手率

Table 1 Fuzzy expected return rates, possibilistic means and monthly turnover rates of three different stocks

证券代码 Stock code	证券名称 Stock name	模糊收益率 Fuzzy expected return rate	可能性均值 Possibilistic mean	月转手率 Monthly turnover rate
002022	科华生物 Kehua biological	(2.174,8.794,8.102)	2.173	24.460
600432	吉恩镍业 Jeen nickel industry	(4.986,12.186,7.334)	4.978	10.223
601888	中国国旅 China CITs	(1.720,8.184,19.094)	1.738	14.340

表 2 3 只股票的可能性协方差

Table 2 Possibilistic covariance of three different stocks

	$\tilde{r}_1$	$\tilde{r}_2$	$\tilde{r}_3$
$\tilde{r}_1$	23.803	9.068	13.012
$\tilde{r}_2$	9.068	32.406	16.261
$\tilde{r}_3$	13.012	16.261	65.314

由于模型 $P3$ 是一个带有线性等式和线性不等式约束的二次规划模型,二次系数矩阵 $2B$ 为正定矩阵,因此可以用 MATLAB 求解.对于不同的偏好因子,可以得到不同的投资比例,部分计算结果见表 3.

表 3 不同偏好因子下的最优投资组合

Table 3 Optimal investment portfolios under different preference parameters

偏好因子 Preference parameter (w_1,w_2)	投资比例 Investment proportion (x_1,x_2,x_3)	目标函数值 The value of objective function	期望收益 Expected return $x^{\mathrm{T}}A$
(0.1,0.4)	(0.527,0.428,0.045)	3.247	3.3540
(0.1,0.5)	(0.500,0.469,0.030)	2.000	3.6077
(0.2,0.5)	(0.469,0.513,0.018)	1.160	3.6041

当 w_1,w_2 分别取值 0.1 和 0.4 时,对于模型 $P3$ 给定 30 个不同的期望取值,用 MATLAB 分别计算投资比例和方差的值,以方差为横坐标,期望为纵坐标绘制模型 $P3$ 的有效边界. 同时使用函数 PortRisk,PortReturn 和 Portopt 函数绘制模型 $P1$ 的有效边界(图 1).

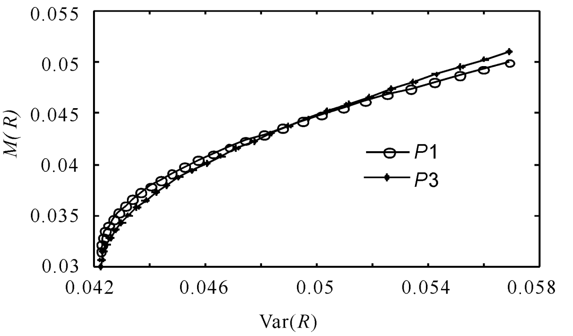

图 1　模型 $P1$、$P3$ 的有效边界比较

Figure 1　The comparison of efficient boundaries of $P1$ and $P3$

由图 1 可知,当组合方差小于 0.048 时,在相同的组合方差下模型 $P3$ 的期望收益比模型 $P1$ 小,可以解释为风险小的股票流动性高,而股票的收益与流动性成反比,所以模型 $P3$ 的期望收益比模型 $P1$ 小. 当组合方差大于 0.052 时,在相同的组合方差下模型 $P3$ 的期望收益比模型 $P1$ 大,可以解释为风险大的股票流动性低,而股票的收益与流动性成反比,所以模型 $P3$ 的期望收益比模型 $P1$ 大. 综上所述,当股票风险较大时,带有流动性的可能性均值-方差模型 $P3$ 优于单纯的可能性均值-方差模型 $P1$,可以帮助投资者得到期望收益更大的投资组合.

参考文献:

[1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance,1952,7(1):77-91.

[2] Tanaka H,Guo P,Türksen I B. Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions[J]. Fuzzy Sets and Systems,2000,111(3):387-397.

[3] 曾建华,汪寿阳. 一个基于模糊决策理论的投资组合模型[J]. 系统工程理论与实践,2003,99(1):100-104.
Zeng J H,Wang S Y. An investment portfolio model based on fuzzy decision theory[J]. System Engineering-Theory & Practice,2003,99(1):100-104.

[4] 陈国华,陈收,房勇,等. 带有模糊收益率的投资组合选择模型[J]. 系统工程理论与实践,2009(7):8-15.
Chen G H,Chen S,Pang Y,et al. Model for portfolio selection with fuzzy return rates[J]. System Engineering-Theory & Practice,2009(7):8-15.

[5] Lippman S A,Mccall J J. An operational measure of liquidity[J]. The American Economic Review,1986,76(1):43-55.

[6] Amihud Y,Mendelson H. Liquidity,maturity,and the yields on US Treasury securities[J]. The Journal of Finance,1991,46(4):1411-1425.

[7] Amihud Y,Mendelson H. Asset pricing and the bid-ask spread[J]. Journal of Financial Economics,1986,17(2):223-249.

[8] Chan H W,Faff R W. Asset pricing and the illiquidity premium[J]. Financial Review,2005,40(4):429-458.

[9] Limkriangkrai M,Durand R B,Watson I. Is liquidity the missing link? [J]. Accounting & Finance,2008,48(5):829-845.

[10] Chung S,Wei P. The relationship between bid-ask spreads and holding periods:The case of Chinese A and B shares[J]. Global Finance Journal,2005,15(3):239-249.

[11] Bekaert G,Harvey C R,Lundblad C. Liquidity and expected returns: Lessons from emerging markets[J]. Review of Financial Studies,2007,20(6):1783-1831.

[12] Lam K S K,Tam L H K. Liquidity and asset pricing: Evidence from the Hong Kong stock market[J]. Journal of Banking & Finance,2011,35(9):2217-2230.

[13] Brennan M J,Chordia T,Subrahmanyam A. Alternative factor specifications, security characteristics, and the cross-section of expected stock returns[J]. Journal of Financial Economics,1998,49(3):345-373.

[14] Datar V T,Y Naik N,Radcliffe R. Liquidity and stock returns: An alternative test[J]. Journal of Financial Markets,1998,1(2):203-219.

[15] Chordia T,Subrahmanyam A,Anshuman V R. Trading activity and expected stock returns[J]. Journal of Financial Economics,2001,59(1):3-32.

[16] Amihud Y. Illiquidity and stock returns:Cross-section and time-series effects[J]. Journal of financial markets,2002,5(1):31-56.

[17] Liu W. A liquidity-augmented capital asset pricing model[J]. Journal of Financial Economics,2006,82(3):631-671.

(责任编辑:尹　闯)