网络优先数字出版时间:2014-04-30
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13656/j.cnki.gxkx.20140430.001.html

非线性四阶抛物方程的有限传播速度*

The Finite Speed of Propagation for a Nonlinear Fourth Order Parabolic Equation

朱宝骧,郭金勇**
ZHU Bao-xiang,GUO Jin-yong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)
(Department of Mathematics and Computer Science,Liuzhou Teachers College,Liuzhou,Guangxi,545004,China)

摘要:利用能量等式、Hardy 不等式及 Nirenberg 不等式,讨论一个非线性四阶抛物方程的初边值问题解的有限传播,得到方程解的传播速度的有限性.

关键词:非线性 四阶抛物方程 有限传播速度
中图分类号:O175.26 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2015)02-0225-03

Abstract:We consider an initial-boundary value problem for the nonlinear fourth order equation. The finite speed of propagation of weak solutions is discussed by using the energy equality,Hardy inequality and Nirenberg inequality.

Key words:nonlinear,fourth order parabolic equation,finite speed of propagation

EFK(Extended Fisher-Kolmogorov)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\gamma\Delta^2 u-\Delta u+f(u)=0,$$

其中 $\gamma>0$,$f(u)=u^3-u$,Δ^2 为双调和算子,是在研究双稳态系统、总体遗传学、自组织、空间混沌、反应扩散系统等实际问题时提出的.该方程孤立子的存在唯一性和定性性质,行波和空间混沌等方面的研究已有报道[1~3].而学者研究人口问题的增长与弥散时又提出了广义 Ginzburg-Landau 模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+k\Delta^2 u-\Delta A(u)+G(u)=0,$$

其中 $u(x,t)$ 表示人口密度,$G(s)$ 是已知的非线性函数,表示动力或反应项.此方程广义解和古典解的整体存在唯一性以及解的渐进性,行波解的不稳定性和径向对称解的存在性等方面的研究也有过报道[4~6].

本文考虑非线性四阶抛物方程的初边值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)-\Delta u+\lambda|u|^{p-2}u=0,x\in\Omega,t>0,\quad(1)$$

$$u=\Delta u=0,x\in\partial\Omega,t>0,\quad(2)$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega,\quad(3)$$

其中 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 为具有光滑边界的有界开区域,$\lambda>0$ 为参数,$u_0(x)\in W_0^{2,p}(\Omega)$ 为初始值函数,$\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u):=\Delta_p^2 u$ 称为 p - 双调和算子.当 $p=2$ 时,(1)式为 EFK 方程和广义 Ginzburg-Landau 型方程的变形.关于问题(1)～(3)弱解的存在唯一性和渐近行为已有报道[7~9],但是关于此抛物方程弱解传播的有限性研究还未见报道.本文受文献[10]的启发,利用能量等式、Hardy 不等式及 Nirenberg 不等式,讨论问题(1)～(3)弱解扰动的有限传播速度.为叙述方便,假设 $\lambda=1$,当 $\lambda\neq1$ 时,证明方法类似.

引理 1 对任意的 $\rho(x)\in C^2(\overline{\Omega})$,$\rho(x)\geqslant0$,问题(1)～(3)的弱解 u 满足能量等式

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(x)|u(x,t)|^2\mathrm{d}x-$$

收稿日期:2014-04-10
修回日期:2014-05-10
作者简介:朱宝骧(1956-),男,副教授,主要从事微分方程研究。
*广西教育厅科研项目(201204LX502)资助。
**通讯作者:郭金勇(1962-),男,副教授,主要从事偏微分方程研究,E-mail:lzszgjy@126.com。

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho(x)\mid u_0(x)\mid^2 \mathrm{d}x=$$

$$-\iint_{Q_t}\mid\Delta u\mid^{p-2}\Delta u\Delta(\rho(x)u(x,\tau))\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\iint_{Q_t}\nabla u\nabla(\rho(x)u(x,\tau))\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\iint_{Q_t}\rho(x)\mid u(x,\tau)\mid^p \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{\Omega}\times(0,t). \quad (4)$$

证明过程参考文献[9].

引理 2 假设 $f_s(z)=\int_z^{\infty}(x-z)^s g(x)\mathrm{d}x, g(x)\in L^1(\mathbb{R}_+), g(x)\geqslant 0, k>0, \alpha_0>0, \theta>0, s\geqslant 1$,且 $0<h\leqslant s<\omega=\frac{\theta h}{\theta-1}$,$f_{s-h}(0)$ 有界,并满足

$$f_s(z)\leqslant k^{\alpha_0}(f_{s-h}(z))^{\theta}, \forall z\geqslant 0,$$

那么,f_0 的支集是有界区间 $[0,l]$,且

$$l\leqslant(\omega-s+1)k^{\frac{\alpha_0}{(\theta-1)(\omega-s)}}f_0(0)^{\frac{1}{\omega-s}}.$$

证明过程参考文献[11].

引进下面的记号:

假设 $\alpha_0>0$(如同引理 2),$\beta>0, b>0$ 为不依赖于 t 的常数,$n\in\mathbb{N}$ 且 $n\geqslant 1, t>0, x\in\boldsymbol{\Omega}, x=(x_1,\cdots,x_n), (x)_+=\max\{x,0\}$. 定义函数

$$\sigma_n(t)=\sup\{z; x\in \mathrm{supp}u(\cdot,t)\}, z=x_n.$$

定理 1 假设 $p>2$,$\mid\sigma_n(0)\mid\leqslant b$,且 u 是问题(1)~(3)的弱解,那么对任意固定的 $t>0$,有

$$\sigma_n(t)-\sigma_n(0)\leqslant Ct^{\alpha}\left(\int_0^t\int_{\Omega}\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right)^{\beta},$$

C 是仅依赖于 p,n,b 的正常数.

证明 通过平移,可以假设 $\sigma_n(0)=0$. 不失一般性,假设 $\sigma_n(t)>0$. 在(4)式中,取 $\rho(x)=(z-z_0)_+^s$,$z_0\geqslant b, s\geqslant 2p$,有

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid u(x,t)\mid^2\mathrm{d}x=$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega}\mid\Delta u\mid^{p-2}\Delta u\Delta[(z-z_0)_+^s u]\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\int_0^t\int_{\Omega}\nabla u\nabla[(z-z_0)_+^s u]\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

记上式的左边为 I,则

$$I=-\int_0^t\int_{\Omega}\mid\Delta u\mid^{p-2}\Delta u\Delta[(z-z_0)_+^s u]\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\int_0^t\int_{\Omega}\nabla u\nabla[(z-z_0)_+^s u]\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau=$$

$$-\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$2\int_0^t\int_{\Omega}\nabla[(z-z_0)_+^s]\nabla u\mid\Delta u\mid^{p-2}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\int_0^t\int_{\Omega}s(s-1)(z-z_0)_+^{s-2}u\mid\Delta u\mid^{p-2}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\nabla u\mid^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\int_0^t\int_{\Omega}s(z-z_0)_+^{s-1}u\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

利用 Young 不等式以及 Poincaré 不等式,则

$$I\leqslant-\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4}\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C_1\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-p}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+$$

$$\frac{1}{4}\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C_2\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-2p}\mid u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\nabla u\mid^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-$$

$$C_3\int_0^t\int_{\Omega}s(z-z_0)_+^{s-1}\mid u\mid^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau-\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+$$

$$C_1\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-p}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+C_2\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-2p}\mid u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau.$$

又由 Hardy 不等式[12],得

$$\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-2p}\mid u\mid^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{s-2p+1}\right)^p\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-p}\mid D_z u\mid^p\mathrm{d}x.$$

因此

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant C_4\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-p}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau+$$

$$C_5\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-p}\mid D_z u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant C\int_0^t\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{s-p}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

从而

$$\sup_{0<\tau\leqslant t}\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^2\mathrm{d}x\leqslant C\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^{s-p}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, \quad (5)$$

$$\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant C\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^{s-p}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \quad (6)$$

由(5)式,再使用 Hardy 不等式,有

$$\sup_{0<\tau\leqslant t}\int_{\Omega}(z-z_0)_+^s\mid u\mid^2\mathrm{d}x\leqslant C\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau. \quad (7)$$

令

$$E_s(z_0)=\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^s\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau, E_0(z_0)=\int_0^t\int_{\Omega}\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau,$$

根据(6)式以及加权 Nirenberg 不等式[13],则

$$E_{2p+1}(z_0)\leqslant C_1\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^{p+1}\mid\nabla u\mid^p\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$C\int_0^t\left(\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{p+1}\mid\Delta u\mid^p\mathrm{d}x\right)^a\left(\int_{\Omega}(z-z_0)_+^{p+1}\mid u\mid^2\mathrm{d}x\right)^{(1-a)p/2}\mathrm{d}\tau,$$

这里 $\frac{1}{p}=\frac{1}{p+2}+a(\frac{1}{p}-\frac{2}{p+2})+(1-a)\frac{1}{2}$，因此

$$a=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{p}-\frac{2}{p+2}-\frac{1}{2}}<1.$$

使用(7)式，得到

$$E_{2p+1}(z_0)\leqslant C\Big(\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^{p+1}|\Delta u|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\Big)^{(1-a)p/2}\int_0^t\Big(\int_\Omega(z-z_0)_+^{p+1}|\Delta u|^p\,\mathrm{d}x\Big)^a\mathrm{d}\tau\leqslant C[E_{p+1}(z_0)]^{(1-a)p/2}\Big(\iint_{Q_t}(z-z_0)_+^{p+1}|\Delta u|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\Big)^a t^{1-a}\leqslant CE_{p+1}(z_0)^{(1-a)p/2+a}t^{1-a}.$$

因此，

$$\Delta u=0\quad \text{a. e. 于 } z_0>b,0<\tau<t. \tag{8}$$

再由(7)式知道 $u=0$ a. e. 于 $z_0>b,0<\tau<t$.

取 $k=Ct,\alpha_0=1-a,\theta=\frac{p(1-a)}{2}+a,h=p+1$，$g=\int_0^t|\Delta u|^p\mathrm{d}\tau$，从而 $f_s(z)=E_s(z)$. 由引理 2 得到

$$\operatorname{supp} f_0\leqslant l\leqslant(\omega-s+1)Ct^{\frac{\alpha_0}{(\theta-1)(\omega-s)}}f_0(0)^{\frac{1}{\omega-s}}\leqslant(\omega-s+1)Ct^{\frac{\alpha_0}{(\theta-1)(\omega-s)}}\Big(\int_0^t\int_\Omega|\Delta u|^p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\Big)^{\frac{1}{\omega-s}}.$$

在上式中取 $C=(\omega-s+1)C,\alpha=\frac{\alpha_0}{(\theta-1)(\omega-s)},\beta=\frac{1}{\omega-s}$. 且注意到(8)式，有

$$f_0(z)=\int_z^\infty\int_0^t|\Delta u|^p\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x=\int_z^b\int_0^t|\Delta u|^p\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x+\int_b^\infty\int_0^t|\Delta u|^p\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x=\int_z^b\int_0^t|\Delta u|^p\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x,$$

从而 $\operatorname{supp} f_0=\operatorname{supp}\int_z^b\int_0^t|\Delta u|^p\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x$，由记号知 $\sigma_n(t)=\sup\operatorname{supp}f_0$. 因此，定理 1 的结论成立.

参考文献：

[1] Peletier L A，Rotariu-Bruna A I. Pulse-like spatial patterns described by higher-order model equations[J]. J Differential Equations，1998，150(1)：124-187.

[2] Albeverio S，Nizhnik I L. Spatial chaos in a fourth-order-nonlinear parabolic equation[J]. Phys Lett A，2001，288(5)：299-304.

[3] Rottschäfer V，Wayne C E. Existence and stability oftraveling fronts in the Extended Fisher-Kolmogorov equation[J]. J Differential Equations，2001，176(2)：532-560.

[4] 陈国旺. 人口问题中的三维 Ginzburg-Landau 模型方程的 Cauchy 问题[J]. 数学年刊：A 辑，1999，20(2)：143-150.
Chen G W. The Cauchy problem for a three dimensional Ginzburg-Landau model equation arising in population problems[J]. Chinese Annals of Mathematics，1999，A20(2)：143-150.

[5] Liu C C. Instability of traveling waves for a generalized-diffusion model in population problems[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations，2004(18)：1-10.

[6] 刘长春，张达鑫. 人口问题中一般扩散模型的径向对称解[J]. 吉林大学学报：理学版，2007，45(1)：15-22.
Liu C C，Zhang D X. Radial symmetric solutions for a generalized diffusion model in population problem[J]. Journal of Jilin University：Sciences Edition，2007，45(1)：15-22.

[7] 郭金勇. 一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程弱解的存在性[J]. 河池学院学报，2008，28(2)：15-19.
Guo J Y. The existence of weak solutins for a fourth order degenearate parabolic equation with nonlinear relation[J]. J Hechi University，2008，28(2)：15-19.

[8] 黎运发，郭金勇. 一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程弱解的唯一性[J]. 广西科学院学报，2010，26(2)：97-99.
Li Y F，Guo J Y. The uniqueness of weak solution for a fourth order degerate parabolic equation with nonlinear relation[J]. Journal of Guangxi Academy of Sciences，2010，26(2)：97-99.

[9] 邓丽，郭金勇，吴春梅. 一个具有非线性关系的退化四阶抛物方程弱解的渐近行为[J]. 柳州师专学报，2009，24(5)：114-116.
Deng L，Guo J Y，Wu C M. The asymptotic behavior of weak solutions for a fourth order degenerate parabolic equation with nonlinear relation[J]. Journal of Liuzhou Teachers College，2009，24(5)：114-116.

[10] 郭金勇. 一个广义薄膜方程扰动的有限传播[J]. 广西科学，2012，19(4)：316-318.
Guo J Y. A finite propagation of perturbations of weak solutions for the generalized thin film equation[J]. Guangxi Sciences，2012，19(4)：316-318.

[11] Bernis F. Qualitative properties for some nonlinearhigher order degenerate parabolic equations[J]. Houston J Math，1988(14)：319-352.

[12] Hardy G H，Littlewood J E，Pólya G. Inequalities[M]. Cambridge：Cambridge University Press，1952.

[13] Bernis F. Compactness of the support for some nonlinear elliptic problems of arbitrary order in dimension n[J]. Comm Partial Differential Equations，1984(9)：271-312.

（责任编辑：尹　闯）