

一类非线性系统连续非光滑自适应观测器设计* Continuous but Nonsmooth Adaptive Observer Design for A Class of Nonlinear Systems

沈艳军, 胡俊波

SHEN Yan-jun, HU Jun-bo

(三峡大学电气与新能源学院, 湖北宜昌 443002)

(College of Electrical Engineering & New Energy, China Three Gorges University, Yichang, Hubei, 443002, China)

摘要: 在已有文献的基础上增加非线性齐次误差项, 给出一类具有单边或拟单边 Lipschitz 条件的非线性系统连续非光滑自适应观测器的设计方法, 并进行仿真。所设计的观测器有线性部分和非线性齐次部分, 其中, 线性部分可以确保观测误差全局 Lyapunov 稳定, 而非线性齐次部分可以加快状态误差和参数误差收敛速度, 提高抗干扰性。仿真结果表明, 所设计的观测器是有效的。

关键词: 非线性系统 连续非光滑 自适应观测器

中图分类号: O23 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2015)04-0421-04

Abstract: In this paper, continuous but nonsmooth adaptive observer design is studied for a class of one-sided Lipschitz and quasi-one-sided Lipschitz nonlinear systems. The observer has two part: Linear part and homogeneous nonlinear part. The linear part can guarantee that the observation errors are globally Lyapunov stable. The homogeneous nonlinear part can speed up convergent rate of the state error and the parameter error. It can also improve robust against noises. At last, numerical simulations show the validity of the proposed methods.

Key words: nonlinear system, continuous but nonsmooth, adaptive observer

0 引言

近年来, 非线性系统自适应观测器的设计成为研究热点, 主要表现为 3 个方面: 1) 具有自适应观测器标准型的非线性系统自适应观测器设计, 这类设计主要通过变量变换把一个非线性系统变成自适应观测器标准型, 再给出其状态和参数估计, 在持续激励条件下, 保证了状态误差和参数误差同时渐近收敛到零点^[1]; 2) 对非线性项满足 Lipschitz 条件并与所有状态变量均有关的非线性系统, 通过构造满足某些条件

的 Lyapunov 函数, 再设计其自适应观测器^[2]。这两类方法适用于未知参数是线性化的非线性系统; 3) 未知参数非线性化的非线性系统自适应观测器的设计^[3]。随着自适应观测器理论和方法的发展, 多种类型的非线性系统被考虑。例如, 文献[4]考虑带随机干扰的不确定非线性系统自适应观测器的设计。由于单边 Lipschitz 条件和拟单边 Lipschitz 条件比 Lipschitz 条件减少了保守性, 故拟单边 Lipschitz 条件的非线性系统自适应观测器设计也引起人们的重视^[5]。

上述观测器的设计其观测误差都是渐近收敛的, 而有限时间观测器能在给定的时间段内实现状态的精确重构, 具有快速性和精确性等特征。研究表明, 在系统具有干扰和不确定情况下, 有限时间稳定的系统在原点附近具有更快的收敛性, 从而具有更好的鲁棒性和抗干扰性^[6,7]。目前, 有限时间观测器的设计方法之一就是原有的线性误差项的基础上, 通过增加

收稿日期: 2015-05-12

作者简介: 沈艳军(1970-), 男, 教授, 主要从事非线性系统、神经网络等研究。

* 国家自然科学基金项目(61374028)资助。

连续非光滑的齐次非线性误差项来实现. 线性误差项可以保证系统状态误差全局收敛, 而连续非光滑的非线性项可以保证系统状态误差有限时间收敛^[8~10]. 本文考虑将这些连续非光滑的非线性项应用到自适应观测器设计中, 在文献[5, 8~10]的基础上进一步研究一类单边和拟单边 Lipschitz 非线性系统连续非光滑自适应观测器设计. 与现有的观测器相比, 本文设计的观测器增加了连续非光滑的非线性齐次项, 这些非线性齐次项可以加快状态误差和参数收敛速度, 提高自适应观测器的鲁棒性.

1 系统描述

考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \gamma(x, u) + f(x, u)\theta, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, 系统的状态向量 $x \in R^n$, 系统的输入向量 $u \in R^q$, 系统的输出向量 $y \in R$, 常数矩阵 $A \in R^{n \times n}$, 且

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in R^{1 \times n},$$

未知参数 $\theta \in R^p$ 且满足

$$\|\theta\| \leq l_2, \quad (2)$$

其中常数 $l_2 > 0$, $\gamma: R^n \times R^q \rightarrow R^n$ 是已知的非线性函数, 且满足如下单边 Lipschitz 条件:

$$(x - \hat{x})^T (\gamma(x, u) - \gamma(\hat{x}, u)) \leq \beta_1 (x - \hat{x})^T (x - \hat{x}), \quad \forall x, \hat{x} \in R^n, \quad (3)$$

或拟单边 Lipschitz 条件

$$(x - \hat{x})^T P (\gamma(x, u) - \gamma(\hat{x}, u)) \leq (x - \hat{x})^T M (x - \hat{x}), \quad \forall x, \hat{x} \in R^n. \quad (4)$$

非线性函数 $f: R^n \times R^q \rightarrow R^{n \times p}$ 满足如下 Lipschitz 条件:

$$\|f(x, u) - f(\hat{x}, u)\| \leq l_1 \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in R^n, \quad (5)$$

其中, $\beta_1, l_1 > 0$ 是常数, M 为正定矩阵. 正定矩阵 P 满足如下矩阵不等式:

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + (l_3 + 1)P < 0, \quad (6)$$

或

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + (l_4 + 1)P + 2M < 0, \quad (7)$$

其中 $l_3 = 2c_1 l_1 l_2 + 2c_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\beta_1 \beta_3 + \beta_2 + 1)$, $l_4 = 2c_1 l_1 l_2 + 2c_2$, $\lambda_1 = \lambda_{\max}(P)$, $\lambda_2 = \lambda_{\min}(P)$, $c_1, c_2, \beta_2, \beta_3$ 是正常数(文后将给出). 此外, 对系统还作如下假设

数(文后将给出). 此外, 对系统还作如下假设

假设 1 存在向量函数 $g(x, u)$, 使得对于满足(6)式或(7)式的矩阵 P 有下面条件成立

$$Pf(x, u) = C^T g^T(x, u). \quad (8)$$

对于系统(1), 文献[5]讨论其自适应观测器设计, 本文主要是在论文[5]的基础上增加非线性齐次误差项, 以进一步加快误差收敛速度, 提高抗干扰能力. 那么对于不等式(6)和(7), 存在 $0 < \rho < 1$ 使得

$$(A - (1 + \rho)KC)^T P + P(A - (1 + \rho)KC) + (l_3 + 1)P < 0, \quad (9)$$

或

$$(A - (1 + \rho)KC)^T P + P(A - (1 + \rho)KC) + (l_4 + 1)P + 2M < 0. \quad (10)$$

2 主要结果

对于系统(1)设计如下自适应观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \gamma(\hat{x}, u) + f(\hat{x}, u)\hat{\theta} + K(y - \hat{y}) + \rho F(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= C\hat{x}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \lambda g(\hat{x}, u)(y - \hat{y}), \quad (12)$$

其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{\theta}$ 分别是 x, y, θ 的估计值, $\lambda > 0$ 是常数,

$$F(y - \hat{y}) = \begin{bmatrix} k_1 \boxed{e_1}^{\alpha_1} \\ k_2 \boxed{e_1}^{\alpha_2} \\ \vdots \\ k_n \boxed{e_1}^{\alpha_n} \end{bmatrix}, \boxed{e_1}^{\alpha_i} = |e_1|^{\alpha_i} \text{sign}(e_1), \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} =$$

KC, e_1 是 $e = x - \hat{x}$ 的第一个分量. $\alpha_i = i\alpha - (i - 1)$, $0 < \alpha < 1 - 1/(n - 1), i = 0, 1, \dots, n$.

令 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$. 由(1)式、(11)式和(12)式可得误差系统

$$\dot{e} = (A - KC)e + \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) + f(x, u)\theta - f(\hat{x}, u)\hat{\theta} - \rho F(y - \hat{y}), \quad (13)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\lambda g(\hat{x}, u)Ce, \quad (14)$$

式中 $\tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) = \gamma(x, u) - \gamma(\hat{x}, u)$.

定理 1 对于满足单边 Lipschitz 条件(3)的非线性系统(1), 构造观测器(11)~(12), 如果满足条件(2)、(3)、(5)、(6)和(8), 且 $\gamma(x, u)$ 是二次内积有界, 即存在正常数 β_2 和 $\beta_3 > 0$ 使得

$$(\gamma(x, u) - \gamma(\hat{x}, u))^T (\gamma(x, u) - \gamma(\hat{x}, u)) \leq \beta_2 (x - \hat{x})^T (x - \hat{x}) + \beta_3 (\gamma(x, u) - \gamma(\hat{x}, u))^T (x - \hat{x}).$$

则存在 $0 < \alpha < 1 - 1/(n - 1)$, 使得状态误差和参数误差是渐近稳定的.

证明 构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = e^T P e + \frac{1}{\lambda} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}. \quad (15)$$

考虑集合 $B = \{e: e^T P e > 1\}$. 当 $e \in B$, 沿着误差系统 (13) ~ (14) 求得

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} = 2e^T P \dot{e} + \frac{2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}}{\lambda} = e^T (P(A -$$

$$KC) + (A - KC)^T P)e + 2e^T P \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) + 2e^T P(f(x, u)\theta - f(\hat{x}, u)\hat{\theta}) - 2\rho e^T P F(y - \hat{y}) - 2\tilde{\theta}^T g(\hat{x}, u)C e.$$

由(3)式, 以及 $\gamma(x, u)$ 是二次内积有界, 得

$$2e^T P \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) \leq 2\lambda_1 (e^T e)^{1/2} (\tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u))^T \tilde{\gamma}(x,$$

$$\hat{x}, u)^{1/2} \leq \lambda_1 e^T e + \lambda_1 \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u)^T \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) \leq \lambda_1 ((\beta_2 + 1)e^T e + \beta_3 (\gamma(x, u) - \hat{\gamma}(\hat{x}, u))^T e) \leq$$

$$\lambda_1 (\beta_1 \beta_3 + \beta_2 + 1) e^T e \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (\beta_1 \beta_3 + \beta_2 + 1) e^T P e.$$

另外,

$$e^T P(f(x, u)\theta - f(\hat{x}, u)\hat{\theta}) = e^T P(f(x, u) - f(\hat{x}, u))\theta + e^T P f(\hat{x}, u)\tilde{\theta} \leq l_2 (e^T P e)^{1/2} ((f(x, u) - f(\hat{x}, u))^T P(f(x, u) - f(\hat{x}, u)))^{1/2} +$$

$$e^T C^T g^T(\hat{x}, u)\tilde{\theta} \leq l_1 l_2 (e^T P e)^{1/2} \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} (e^T P e)^{1/2} +$$

$$e^T C^T g^T(\hat{x}, u)\tilde{\theta} \leq c_1 l_1 l_2 e^T P e + e^T C^T g^T(\hat{x}, u)\tilde{\theta},$$

其中 $c_1 = \sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$, 且

$$e^T P F(y - \hat{y}) \leq (e^T P e)^{1/2} (F^T(y - \hat{y}) P F(y - \hat{y}))^{1/2} \leq (e^T P e)^{1/2} \sqrt{\lambda_1} (F^T(y - \hat{y}) F(y - \hat{y}))^{1/2} \leq$$

$$(e^T P e)^{1/2} \bar{k} \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^n e_i^{2\alpha_j} \right)^{1/2} \leq$$

$$(e^T P e)^{1/2} \bar{k} \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n e_i^{2\alpha_j} \right)^{1/2} \leq$$

$$(e^T P e)^{1/2} \bar{k} \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^n (e^T P e / \lambda_2) \alpha_j \right)^{1/2},$$

其中 $\bar{k} = \max_{1 \leq i \leq n} \{k_i\}$, 注意到 $0 < \alpha_i < 1$ 且 $e^T P e > 1$, 从而存在常数 $c_2 = \bar{k} \sqrt{n \lambda_1 / \lambda_2}$, 使得

$$e^T P F(y - \hat{y}) \leq$$

$$(e^T P e)^{1/2} \bar{k} \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^n (e^T P e / \lambda_2) \right)^{1/2} \leq c_2 e^T P e.$$

从而有

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} = 2e^T P \dot{e} + \frac{2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}}{\lambda} = e^T (P(A -$$

$$KC) + (A - KC)^T P + l_3 P)e \leq -e^T P e < -1.$$

则

$$V(t) \leq V(t_0) - (t - t_0), e \in B. \quad (16)$$

显然存在 $T_1 > 0$, 当 $t > T_1$ 时使得 $e^T P e \leq 1$. 令 $\bar{\Pi}_\delta =$

$$\left\{ e: e^T P e + \frac{\tilde{\theta}^T \tilde{\theta}}{\lambda} \leq \delta^2 \right\}. \text{ 则存在 } \delta_1 > 0, \text{ 当 } t > T_1 \text{ 有}$$

$(e, \tilde{\theta}) \in \bar{\Pi}_{\delta_1}$. 那么,

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} = 2e^T P \dot{e} + \frac{2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}}{\lambda} = e^T (P(A -$$

$$KC) + (A - KC)^T P)e + 2e^T P \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) + 2e^T P(f(x, u)\theta - f(\hat{x}, u)\hat{\theta}) - 2\rho e^T P F(y - \hat{y}) - 2\tilde{\theta}^T g(\hat{x}, u)C e, (e, \tilde{\theta}) \in \bar{\Pi}_{\delta_1}.$$

考虑到集合 $\bar{\Pi}_{\delta_1}$ 是一个紧集, 同时注意到 $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \alpha_i = \lim_{\alpha \rightarrow 1} (\alpha \alpha - (\alpha - 1)) = 1$, 则

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} 2\rho e^T P F(y - \hat{y}) = 2\rho e^T P \begin{bmatrix} k_1 e_1 \\ k_2 e_1 \\ \vdots \\ k_n e_1 \end{bmatrix} =$$

$$2\rho e^T P K C e.$$

从而可得

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} = e^T (P(A - (1 + \rho)KC) +$$

$$(A - (1 + \rho)KC)^T P)e + 2e^T P \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) + 2e^T P(f(x, u)\theta - f(\hat{x}, u)\hat{\theta}) - 2\tilde{\theta}^T g(\hat{x}, u)C e, (e, \tilde{\theta}) \in \bar{\Pi}_{\delta_1}.$$

再根据之前分析可得

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} \leq 2e^T P \dot{e} + \frac{2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}}{\lambda} \leq$$

$$e^T (P(A - (1 + \rho)KC) + (A - (1 + \rho)KC)^T P +$$

$$l_3 P)e < 0, (e, \tilde{\theta}) \in \bar{\Pi}_{\delta_1}.$$

从而存在 $0 < \alpha < 1 - 1/(n - 1)$ 使得

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} < 0, (e, \tilde{\theta}) \in \bar{\Pi}_{\delta_1}.$$

则状态误差和参数误差是渐近稳定的.

定理 2 对于满足单边 Lipschitz 条件(4)的非线性系统(1), 构造观测器(11), (12), 如果条件(2)、(4)、(5)、(7)和(8)满足, 则存在 $0 < \alpha < 1 - 1/(n - 1)$, 使得状态误差和参数误差是渐近稳定的.

证明 将(15)式定义的 Lyapunov 函数 $V(t)$ 沿着系统(13), (14)求得,

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{(13),(14)} = 2e^T P \dot{e} + \frac{2\tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}}{\lambda} = e^T (P(A -$$

$$KC) + (A - KC)^T P)e + 2e^T P \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) + 2e^T P(f(x, u)\theta - f(\hat{x}, u)\hat{\theta}) - 2\rho e^T P F(y - \hat{y}) - 2\tilde{\theta}^T g(\hat{x}, u)C e.$$

由(3)式有

$$e^T P \tilde{\gamma}(x, \hat{x}, u) \leq e^T M e.$$

再类似定理 1 的证明,可以得到状态误差和参数误差是渐近稳定的。

3 数值实验

考虑如下非线性系统:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 0.1 \sin(x_1 x_2) + (\sin t - \cos t)\theta,$$

$$\dot{x}_2 = (\sin t - \cos t)\theta,$$

$$y = x_1 + \delta,$$

其中 δ 是高斯白噪声,设计如下自适应观测器

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 3e_1 + 3\rho \boxed{e_1} + 0.1 \sin(\hat{x}_1 \hat{x}_2) + (\sin t - \cos t)\hat{\theta},$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = (\sin t - \cos t)\hat{\theta} + 2e_1 + \rho 2 \boxed{e_1}^{2\alpha-1},$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \lambda(\sin t - \cos t)e_1,$$

其中 $e_1 = x_1 - \hat{x}_1, \alpha = 0.85, \rho = 0.8, \lambda = 10$ 。

仿真结果见图 1~3。

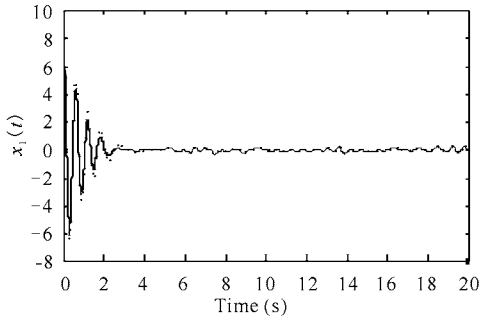


图 1 状态 x_1 误差曲线

Fig. 1 The error curve of state variable x_1

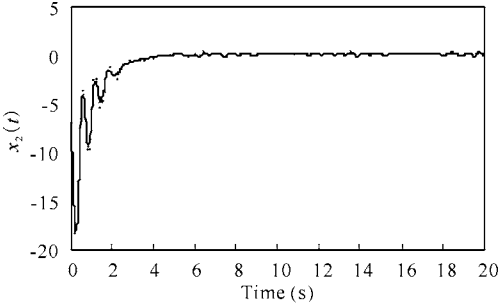


图 2 状态 x_2 误差曲线

Fig. 2 The error curve of state variable x_2

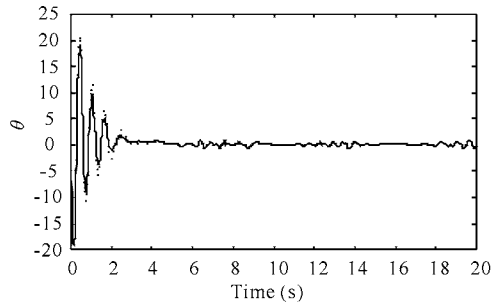


图 3 参数 θ 误差曲线

Fig. 3 The error curve of parameter θ

图 1~3 的结果显示,本文设计的自适应观测器具有更好的鲁棒性,其中实线为本文方法得到的误差曲线,虚线是用文献[5]的方法得到误差曲线。

参考文献:

- [1] Marino R, Tomei P. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.
- [2] Cho Y M, Ajamani R. A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42(8): 534-537.
- [3] Farza M, Saada M M, Maatouga T, et al. Adaptive observers for nonlinearly parameterized class of nonlinear systems [J]. Automatica, 2009, 45: 2292-2299.
- [4] 刘允刚, 张纪峰. 随机非线性系统最小阶状态观测器及输出反馈镇定控制设计 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2004, 34(4): 416-432.
Liu Y G, Zhang J F. Minimum order state observers for random nonlinear systems and their control design for output feedback stabilization [J]. Science in China Ser E Information Sciences, 2004, 34(4): 416-432.
- [5] 高波, 徐明跃. 基于拟单边 Lipschitz 条件的非线性系统自适应观测器设计 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2012, 26(3): 17-19.
Gao B, Xu M Y. Adaptive observer for nonlinear system based on quasi-one-sided Lipschitz condition [J]. Natural Sciences Journal of Harbin Normal University, 2012, 26(3): 17-19.
- [6] Haimo V T. Finite time controllers [J]. SIAM Journal of Control Optimization, 1986, 24(4): 760-770.
- [7] Bhat S, Bernstein D. Finite time stability of continuous autonomous systems [J]. SIAM Journal of Control Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [8] Shen Y J, Xia X H. Semi-global finite time observers for nonlinear systems [J]. Automatica, 2008, 44: 3152-3156.
- [9] Shen Y J, Xia X H. Semi-global Finite Time Observers for A Class of Non-Lipschitz Systems [C]. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2010). Bologna, Italy, 2010: 185-200.
- [10] Shen Y J, Xia X H. Nonlinear Adaptive Observers with Finite-time Convergence for A Class of Lipschitz Nonlinear Systems [C]. 51st IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2012: 320-325.

(责任编辑:尹 闯)