

离散线性时滞系统的近周期脉冲镇定*

Stabilization of Discrete-time Linear System with Time Delays via Nearly-periodic Impulses

韦琳娜^{1,2}, 卢小梅¹

WEI Lin-na^{1,2}, LU Xiao-mei¹

(1. 广西大学数学与信息科学学院, 广西南宁 530004; 2. 华南理工大学数学学院, 广东广州 510641)

(1. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong, 510641, China)

摘要:近周期脉冲是一类特殊的脉冲, 它与一个标称周期脉冲的误差是一个不确定的时变有界项. 本文通过增维方法消除线性系统时滞的影响, 构造线性差分包含刻画系统在脉冲时刻的状态, 从而利用线性差分包含中蕴含的近周期脉冲信息, 构造一个时变 Lyapunov 函数来进行稳定性分析, 得到用线性矩阵不等式表示的带近周期脉冲的离散线性时滞系统的稳定性准则. 在此基础上, 为离散线性时滞系统分别设计了降阶和全阶近周期脉冲控制器. 降阶控制器节省资源, 效率高, 而全阶控制器适用范围更广. 最后, 用 3 个数值算例验证文中方法的有效性.

关键词:近周期脉冲 时变 Lyapunov 函数 离散线性时滞系统 线性差分包含 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2015)04-0430-08

Abstract: Nearly-periodic impulse is a class of special type of impulses, the error between which and a nominal periodic impulse is an uncertain time-varying bounded term. The effect of time delays is eliminated from system by means of increment-dimensional method. Then a linear difference inclusion (LDI) is constructed to describe the system states at the impulse instants. A time-varying Lyapunov function is introduced to analyze the stability of system under consideration, which utilizes the information about nearly-periodic impulse contained in the LDI, and a stability criterion is obtained in the form of linear matrix inequalities. Based on the derived stability results, reduced-order and full-order nearly-periodic impulsive controllers are designed for discrete-time linear systems with time-delays, respectively. The former saves system resources and is more efficient, while the latter is more applicable. Three numerical examples are presented to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: nearly-periodic impulse, time-varying Lyapunov function, discret-time linear system with time-delays, linear difference inclusion, linear matrix inequality

收稿日期: 2015-04-27

修回日期: 2015-05-27

作者简介: 韦琳娜(1976-), 女, 讲师, 主要从事控制论及动力系统研究.

* 国家自然科学基金项目(61164016), 广西自然科学基金重点项目(2013GXNSFDA019003), 广西自然科学基金项目(2011GXNSFA018141)和广西大学科研基金项目(X081059)资助.

由于线性系统在生产实践中起到非常重要的作用,线性系统的控制器设计问题引起研究人员的广泛关注,也取得了大量成果.文献[1]讨论了离散时间线性系统的有限时间控制问题;文献[2,3]为离散时间线性系统设计了周期时变记忆状态反馈控制器;文献[4]给出了连续时间线性系统的鲁棒静态输出反馈控制器存在的充分条件;文献[5]对离散时间切换线性系统的稳定和镇定问题进行了研究;文献[6]为离散线性系统设计了3种 H_∞ 控制器:静态输出反馈控制器,动态输出反馈控制器和基于观测器的输出反馈控制器.然而,这些成果没有考虑到脉冲和时滞对系统的影响.当动力系统的状态在某些瞬时发生突然跳变时,通常用脉冲系统进行建模.脉冲的存在往往使原系统的稳定性发生变化,因此受到广泛的关注[7~12].此外,由于元件的处理速度差异、网络拥塞和传输距离等因素的影响,动力系统往往存在时滞.而时滞也是造成系统不稳定的一个不可忽略的重要因素[13~15].到目前为止,还没有关于离散时间线性时滞系统的近周期脉冲镇定问题的研究成果.

近几年来,基于线性差分包含(LDI)的稳定性研究方法取得了很大进展[16~26],尤其以下涉及线性系统的研究:文献[19]研究了带未知时变时滞的任意切换连续线性系统的镇定问题,将原系统的镇定问题转化为带多方不确定性的LDI的控制综合问题;文献[21]讨论了一类带指数不确定项的离散线性系统的控制器设计问题,所得结果可应用到网络控制切换系统,其中用到一个切换多方LDI;文献[25]关注了带非周期采样控制的线性时不变系统的稳定性,这里的LDI蕴含了非周期采样间隔的信息.文献[26]探讨如何通过一个近周期重置序列镇定系统,用LDI描述系统在重置时刻的状态,进而构造一个类二次型Lyapunov函数进行稳定性分析.上述各文献反映了基于LDI方法的有效性,因此我们将该方法应用到带近周期脉冲的离散线性时滞系统的稳定和镇定研究中.与一般的脉冲不同,近周期脉冲是指它与一个已知的标称周期脉冲比较接近,两者的误差为不确定值,但误差上界已知.本文首先使用增维技术将原本的时滞系统转化为不含时滞的线性系统,再构造LDI描述系统在脉冲时刻的状态,并利用LDI中的凸组合设计一个新颖的与近周期脉冲相关的时变Lyapunov函数,从而得到一个带近周期脉冲的离散线性时滞系统的稳定性判据.在此基础上,为离散线性时滞系统设计了降阶和全阶两种近周期脉冲控制器.前

者可以节省资源,提高控制效率,后者适用范围更广.最后,通过3个数值例子说明结果的有效性.

1 问题描述

本文中, n 阶单位矩阵用符号 I_n 表示.对于对称实矩阵 M ,符号 $M < (>, \leq, \geq) 0$ 分别表示矩阵 M 负定(正定,半负定,半正定). \mathbb{Z}^+ 表示正整数集, \mathbb{Z}_0^+ 表示非负整数集.对向量而言, $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数,而对于矩阵来说,该符号表示谱范数.矩阵 M 的最大(最小)特征值用 $\lambda_{\max}(M)$ ($\lambda_{\min}(M)$)表示.任意给定两个整数 α, β ,且 $\alpha \leq \beta$,定义集合 $N(\alpha, \beta) = \{\alpha, \alpha+1, \dots, \beta\}$. $F(N(-\alpha, 0), R^n) = \{\phi \mid \phi: N(-\alpha, 0) \rightarrow R^n, \|\phi\| < \infty, \|\phi\|_\alpha = \sup_{k \in N(-\alpha, 0)} \|\phi(k)\|, \alpha \in \mathbb{Z}^+\}$.任意给定两个非负整数 d_0, d ,假设 $d_0 \geq 2, t_0 = 0$,定义脉冲时间序列集合 $S(d_0, d) = \{t_k \mid d_0 \leq t_k - t_{k-1} \leq d_0 + d, k \in \mathbb{Z}^+, t_k \in \mathbb{Z}^+\}$.

考虑如下离散时间的线性时滞脉冲系统:

$$\begin{cases} x(t) = A_0 x(t-1) + A_1 x(t-1-\tau), t \neq t_k, \\ t \in \mathbb{Z}^+, \\ x(t) = C_0 x(t-1) + C_1 x(t-1-\tau), t = t_k, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in N(-\tau, 0), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x(t) \in R^n$ 表示系统的状态向量, $A_0, A_1, C_0, C_1 \in R^{n \times n}$ 为系统已知的系数矩阵, $\varphi \in F(N(-\tau, 0), R^n)$ 表示系统的初始函数, $\tau \in \mathbb{Z}_0^+$ 表示系统时滞.脉冲时间序列 $\{t_k\} \in S(d_0, d)$.当 $d \neq 0$ 且比较小时,这样的脉冲虽然不是周期序列,但与周期为 d_0 的周期脉冲的误差不超过 d ,所以称这种类型的脉冲为近周期脉冲.

由于系统(1)中包含常时滞,为消除时滞项的影响,首先对系统(1)增维:

$$\eta(t) = [x^T(t), x^T(t-1), \dots, x^T(t-\tau)]^T, \quad (2)$$

则可得到一个与系统(1)等价的不含时滞的线性离散系统:

$$\begin{cases} \eta(t) = \mathbf{A} \eta(t-1), t \neq t_k, t \in \mathbb{Z}^+, \\ \eta(t) = \bar{\mathbf{C}} \eta(t-1), t = t_k, \\ \eta(t_0) = \eta_0 = [\varphi^T(0), \varphi^T(-1), \dots, \\ \varphi^T(-\tau)]^T, t_0 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & \cdots & 0 & C_1 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}.$$

因而,讨论系统(1)的稳定性将转化为对系统(3)的稳定性分析. 设 $\eta(t, t_0, \eta_0)$ 表示系统(3)在初始时刻 t_0 经过初始状态 η_0 的状态轨迹. 为简便起见, 将 $\eta(t, t_0, \eta_0) \triangleq \eta(t)$. 系统(3)的一致全局指数稳定的定义如下:

定义 1 给定脉冲时间序列集合 $S(d_0, d)$, 若存在常量 $\sigma > 0$ 和 $0 < \lambda < 1$, 使得对任意的 $\{t_k\} \in S(d_0, d)$, 都有以下不等式成立:

$$\|\eta(t)\| \leq \sigma \lambda^t \|\eta_0\|, t \in \mathbb{Z}^+,$$

则称系统(3)关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定(UG-ES).

2 稳定性分析

本节将对系统(3)进行稳定性分析, 最终获得一个新的一致全局指数稳定的充分条件. 为此, 首先讨论系统(3)在脉冲时刻解的性质.

对任意的 $\{t_k\} \in S(d_0, d)$, 均有

$$\eta(t_{k+1}) = \bar{\mathbf{C}} \left(\prod_{l=t_k}^{t_{k+1}-2} \mathbf{A} \right) \eta(t_k) = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A}^{t_{k+1}-t_k-1} \eta(t_k). \quad (5)$$

令

$$H_i = \mathbf{A}^{d_0+i-1}, i \in N(0, d),$$

则有

$$\mathbf{A}^{t_{k+1}-t_k-1} = \sum_{i=0}^d \rho_i(t_k) H_i,$$

其中

$$\rho_i(t_k) = \begin{cases} 1, & i = t_{k+1} - t_k - d_0, \\ 0, & i \neq t_{k+1} - t_k - d_0, i \in N(0, d). \end{cases}$$

所以式(5)可重新表示为

$$\eta(t_{k+1}) = \bar{\mathbf{C}} \left(\sum_{i=0}^d \rho_i(t_k) H_i \right) \eta(t_k). \quad (6)$$

根据(6), 构造如下线性差分包含(LDI):

$$\eta(t_{k+1}) \in \Phi(\eta(t_k)), \quad (7)$$

其中

$$\Phi(\eta) = \{y: y = \bar{\mathbf{C}} H_i \eta, i \in N(0, d)\}.$$

下面将证明系统(3)的稳定性与 LDI 的一致.

定理 1 对于系统(3), 给定的脉冲时间序列集合 $S(d_0, d)$, 以及标量 $0 < \epsilon < 1$, 若存在 $n(\tau+1) \times n(\tau+1)$ 阶矩阵 F 和 $P_i > 0, i \in N(0, d)$, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\epsilon P_i & H_i^T \bar{\mathbf{C}}^T F^T \\ F \bar{\mathbf{C}} H_i & P_j - F - F^T \end{bmatrix} < 0, i, j \in N(0, d), \quad (8)$$

则系统(3)关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定, 即系统(1)关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定.

证明 根据式(6)中的凸嵌套, 为线性差分包含(7)构造如下一个与近周期脉冲相关的 Lyapunov 函数:

$$V(t_{k+1}) = \eta^T(t_k) \left(\sum_{i=0}^d \rho_i(t_k) P_i \right) \eta(t_k).$$

令

$$\Psi_1 = \sum_{i=0}^d \rho_i(t_k) P_i,$$

$$\Psi_2 = \sum_{i=0}^d \rho_i(t_k) H_i,$$

$$\Psi_3 = \sum_{j=0}^d \rho_j(t_{k+1}) P_j,$$

则由式(8)可得

$$\begin{bmatrix} -\epsilon \Psi_1 & \Psi_2^T \bar{\mathbf{C}}^T F^T \\ F \bar{\mathbf{C}} \Psi_2 & \Psi_3 - F - F^T \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

用矩阵 $[I, \Psi_2^T \bar{\mathbf{C}}^T]$ 以及它的转置分别左乘、右乘式(9), 可推出

$$-\epsilon \Psi_1 + \Psi_2^T \bar{\mathbf{C}}^T \Psi_3 \bar{\mathbf{C}} \Psi_2 < 0,$$

从而对任意的 $\{t_k\} \in S(d_0, d)$, 都有

$$V(t_{k+1}) < \epsilon V(t_k),$$

进一步推出

$$V(t_k) < \epsilon^{k-1} V(t_1).$$

令

$$\mu_1 = \min\{\lambda_{\min}(P_i), i \in N(0, h)\},$$

$$\mu_2 = \max\{\lambda_{\max}(P_i), i \in N(0, h)\}.$$

可得

$$\|\eta(t_k)\| < \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \epsilon^{\frac{k-1}{2}} \|\eta(t_1)\|. \quad (10)$$

又因为

$$\eta(t_1) = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{A}^{t_1-1} \eta(t_0),$$

令

$$\delta \triangleq \max_{i \in N(0, d_0+d)} (\|\mathbf{A}\|^i),$$

则有

$$\|\eta(t_1)\| \leq \delta \|\bar{\mathbf{C}}\| \|\eta(t_0)\|, \quad (11)$$

联合(10)式和(11)式可得

$$\|\eta(t_k)\| < \delta \|\bar{\mathbf{C}}\| \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \epsilon^{\frac{k-1}{2}} \|\eta(t_0)\|. \quad (12)$$

对任意的 $t \in N(t_k, t_{k+1}-1)$, 都有

$$k+1 \geq \frac{t}{d_0+d}, \quad (13)$$

且有

$$\eta(t) = \mathbf{A}^{t-t_k} \eta(t_k).$$

又由于对任意的 $\{t_k\} \in S(d_0, d)$, 都有

$$0 \leq t - t_k \leq d_0 + d.$$

则有

$$\| \mathbf{A}^{t-t_k} \| \leq \delta,$$

从而得到

$$\| \eta(t) \| \leq \delta \| \eta(t_k) \|, t \in N(t_k, t_{k+1} - 1).$$

再由式(12)及式(13)可推出

$$\| \eta(t) \| < \sigma \lambda^t \| \eta(t_0) \|,$$

其中

$$\sigma = \delta^2 \| \bar{\mathbf{C}} \| \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \epsilon^{-1}, \lambda = \epsilon^{\frac{1}{2(d_0+d)}}.$$

则可证得系统(3)关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定, 即系统(1)关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定.

注 1 系统(3)是由离散线性时滞系统和近周期脉冲构成的混杂系统. 通常的, 基于二次型 Lyapunov 函数的稳定性分析方法没有完全体现系统的动态变化, 得到的结果较为保守. 定理 1 中构造了一个时变 Lyapunov 函数, 它与近周期脉冲的脉冲间隔改变量的最大幅值相关, 因此包含了更多的系统信息, 降低了所获得的稳定性准则的保守程度.

注 2 定理 1 并没有对系统(3)的离散线性时滞子系统和脉冲子系统的系数矩阵的幅值进行限制, 因此当这两个子系统均不稳定时, 定理 1 中的结果仍然适用, 从而可用该结果来设计脉冲控制器, 尤其是当离散线性时滞子系统只有部分状态稳定时, 还可以设计降阶脉冲控制器, 达到镇定系统、节省资源的目的.

3 控制器设计

下面将考虑如下的离散线性时滞系统的控制器综合问题:

$$\begin{cases} x(t) = A_0 x(t-1) + A_1 x(t-1-\tau), t \neq t_k, \\ t \in \mathbb{Z}^+, \\ x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in N(-\tau, 0). \end{cases} \quad (14)$$

首先, 将系统(14)的状态分成了两个部分: $x = [x_{n_1}^T, x_{n_2}^T]^T$, 其中 $n = n_1 + n_2$. 不妨假设只有第二部分状态 x_{n_2} 受到近周期脉冲的影响, 考虑设计如下形式的降阶近周期脉冲控制器:

$$x_{n_2} = K_1 \odot x_{n_1} + K_2 x_{n_2},$$

其中 $\odot \in R^{m \times n_1}$ 为已知的控制输入矩阵, $K_1 \in R^{n_2 \times m}$, $K_2 \in R^{n_2 \times n_2}$ 表示未知的控制增益矩阵, 需要提供方法进行设计. 为了便于讨论, 将该降阶近周期脉冲控制器重新表述为

$$x(t) = \bar{\mathbf{C}} x(t-1), t = t_k, \quad (15)$$

其中

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ K_1 \odot & K_2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

定理 2 为降阶近周期控制器(15)存在的一个充

分条件.

定理 2 对于系统(14)和降阶近周期脉冲控制器(15), 给定脉冲时间序列集合 $S(d_0, d)$ 和标量 $0 < \epsilon < 1$, 若存在 $n(\tau+1) \times n(\tau+1)$ 阶矩阵 $P_i > 0, i \in N(0, d)$, 和相应维数的矩阵 $\bar{F}_0, Z_l, l=1, 2$, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\epsilon P_i & H_i^T Z^T \\ Z H_i & P_j - F - F^T \end{bmatrix} < 0, i, j \in N(0, d), \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}, \\ F &= \begin{bmatrix} F_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}, \\ F_0 &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \bar{F}_0 \end{bmatrix}_{n \times n}, Z_0 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ Z_1 \odot & Z_2 \end{bmatrix}_{n \times n}. \end{aligned} \quad (17)$$

则由系统(14)和降阶近周期脉冲控制器(15)构成的闭环系统关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定, 且控制增益矩阵 $K_l = \bar{F}_0^{-1} Z_l, l=1, 2$.

证明 若矩阵不等式(16)成立, 可得矩阵 $F + F^T > 0$, 从而可得 F 可逆. 否则 F 有特征值等于零, 即存在非零特征向量 $y \in R^{n(\tau+1)}$, 使得 $Fy = 0$, 则有 $y^T(F + F^T)y = 0$, 与 $F + F^T > 0$ 矛盾.

用增维方法(2)将系统(14)和降阶脉冲控制器(15)构成的闭环系统转化为

$$\begin{cases} \eta(t) = \mathbf{A} \eta(t-1), t \neq t_k, t \in \mathbb{Z}^+, \\ \eta(t) = \tilde{\mathbf{C}} \eta(t-1), t = t_k, \\ \eta(t_0) = \eta_0 = [\varphi^T(0), \varphi^T(-1), \cdots, \varphi^T(-\tau)]^T, \\ t_0 = 0, \end{cases} \quad (18)$$

其中 \mathbf{A} 见式(4), 且

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}. \quad (19)$$

令 $Z = F \tilde{\mathbf{C}}$, 由定理 1 可得系统(18)关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定, 即由系统(14)和降阶脉冲控制器(15)构成的闭环系统关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数

稳定.

此外,由式(17)和式(19),可得

$$\bar{C} = F_0^{-1} Z_0 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \bar{F}_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ Z_1 \textcircled{C} & Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ \bar{F}_0^{-1} Z_1 \textcircled{C} & \bar{F}_0^{-1} Z_2 \end{bmatrix}.$$

则控制增益矩阵 $K_l = \bar{F}_0^{-1} Z_l, l=1, 2$.

接下来考虑为系统(14)设计如下形式的全阶近周期脉冲控制器:

$$x(t) = (I + K \textcircled{C})x(t-1), t = t_k, \quad (20)$$

其中 $\textcircled{C} \in R^{s \times n}$ 是已知的控制输入矩阵,而 $K \in R^{n \times s}$ 是未知的控制增益矩阵.

定理 3 对于系统(14)和全阶近周期脉冲控制器(20),给定脉冲时间序列集合 $S(d_0, d)$ 和标量 $0 < \epsilon < 1$,若存在 $n(\tau+1) \times n(\tau+1)$ 阶矩阵 $P_i > 0, i \in N(0, d), n \times n$ 阶矩阵 \tilde{F}_0 , 和相应维数的矩阵 \tilde{Z}_0 ,使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\epsilon P_i & H_i^T Z^T \\ ZH_i & P_j - F - F^T \end{bmatrix} < 0, i, j \in N(0, d), \quad (21)$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0 + \tilde{Z}_0 \textcircled{C} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}, \quad (22)$$

$$F = \begin{bmatrix} \tilde{F}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)},$$

则由系统(14)和全阶近周期脉冲控制器(20)构成的闭环系统关于 $S(d_0, d)$ 一致全局指数稳定,且控制增益矩阵 $K = \tilde{F}_0^{-1} \tilde{Z}_0$.

证明 将系统(14)和全阶近周期脉冲控制器(20)构成的闭环系统增维,得到

$$\begin{cases} \eta(t) = \mathbf{A}\eta(t-1), t \neq t_k, t \in \mathbb{Z}^+, \\ \eta(t) = \hat{\mathbf{C}}\eta(t-1), t = t_k, \\ \eta(t_0) = \eta_0 = [\varphi^T(0), \varphi^T(-1), \dots, \varphi^T(-\tau)]^T, \\ t_0 = 0, \end{cases} \quad (23)$$

其中 \mathbf{A} 见式(4),且

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} I + K \textcircled{C} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{n(\tau+1) \times n(\tau+1)}. \quad (24)$$

令 $\hat{\mathbf{C}} = F^{-1}Z$, 根据定理 1, 可推出系统(23)在 $S(d_0, d)$ 上一致全局指数稳定,即系统(14)能被全阶近周期脉冲控制器(20)指数镇定.

用定理 2 类似的方法可证得 \tilde{F}_0 可逆. 由式(22)和式(24)推出

$$I + K \textcircled{C} = \tilde{F}_0^{-1} (\tilde{F}_0 + \tilde{Z}_0 \textcircled{C}) = I + \tilde{F}_0^{-1} \tilde{Z}_0 \textcircled{C},$$

所以控制增益矩阵 $K = \tilde{F}_0^{-1} \tilde{Z}_0$.

4 数值算例

下面通过数值例子讨论本文结果的有效性.

例 1 考虑系统(1), 其中

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & 0.3 \\ 0.25 & 0.1 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 1.2 \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & -0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ C_0 &= \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0.01 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ -0.3 & 0.01 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.03 \\ 0.1 & 0 & -0.2 \\ 0.01 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (25)$$

图 1 反映在不考虑脉冲影响时,系统(25)的离散线性时滞子系统是不稳定的. 矩阵 C_0 的谱半径为 1.097, 易知系统(25)的脉冲子系统也不稳定. 假设 $\{t_k\} \in S(2, 1)$, 选取 $\epsilon = 0.95$, 由定理 1 可知, 系统(25)在 $S(2, 1)$ 上一致全局指数稳定, 此时常时滞 τ 的最大上界为 $\tau = 5$. 图 2 绘制了系统(25)的状态轨迹, 其中 $\tau = 5, \{t_k\} \in S(2, 1)$, 且初始函数为 $x(\theta) = [-0.5, 0.5, 0.65]^T, \theta \in N(-5, 0)$.

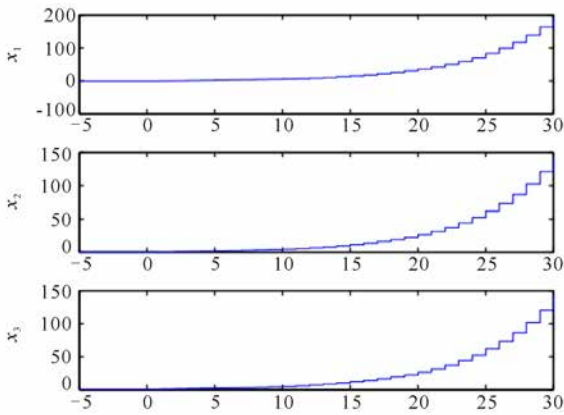


图1 系统(25)没有脉冲时的状态轨迹, $\tau=5$

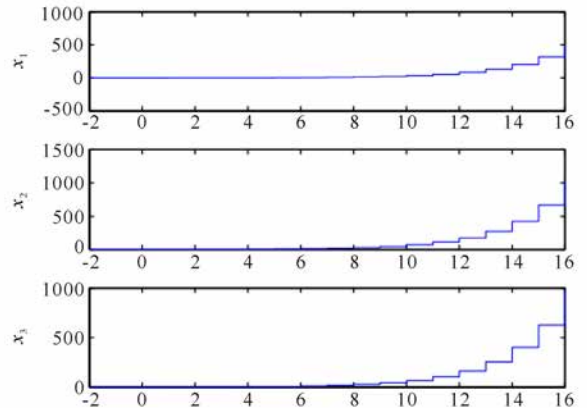


图3 系统(26)的状态轨迹, $\tau=2$

Fig. 1 The state trajectories of system(25) without impulses, $\tau=5$

Fig. 3 The state trajectories of system(26), $\tau=2$

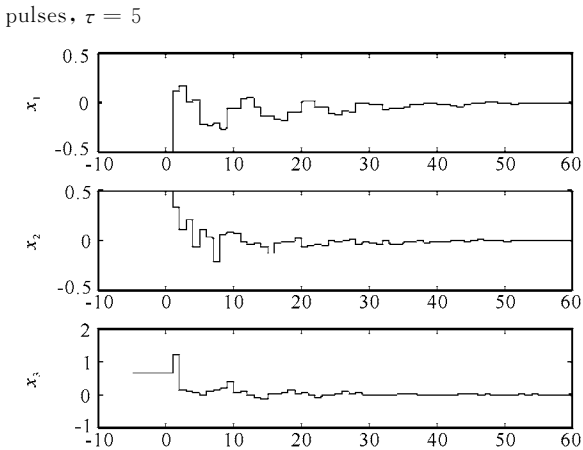


图2 系统(25)的状态轨迹, $\tau=5, \{t_k\} \in S(2,1)$

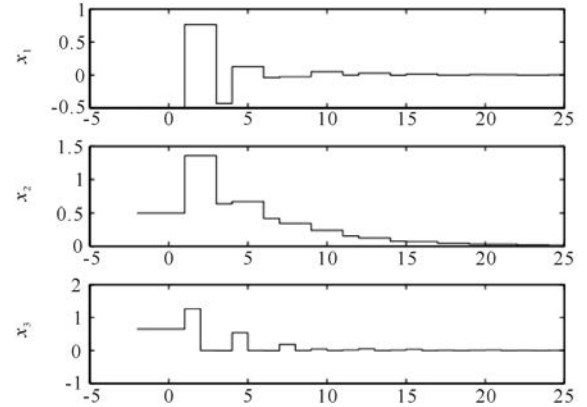


图4 系统(26)在降阶近周期脉冲控制器(15)作用下的状态轨迹, $\tau=2, \{t_k\} \in S(2,1)$

Fig. 2 The state trajectories of system(25), $\tau=5, \{t_k\} \in S(2,1)$

Fig. 4 The state trajectories of system(26) under reduced-order nearly-periodic impulsive controller(15), $\tau=2, \{t_k\} \in S(2,1)$

例2 考虑系统(14), 其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 & 1 \\ -0.3 & 0.5 & 1.2 \\ -0.3 & 0.1 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.01 & -0.2 \\ -0.1 & 0.13 & 0.1 \\ 0.1 & 0.02 & 0.2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

从图3可看出系统(26)是不稳定的. 考虑设计降阶近周期脉冲控制器(15), 其中脉冲输入矩阵为 $\mathbb{C}=[0,1]$. 假设 $\{t_k\} \in S(2,1)$, 选择 $\epsilon=0.96$, 用定理2可得闭环系统在 $S(2,1)$ 上一致全局指数稳定, 且常时滞 τ 的最大值是 $\tau=2$, 此时降阶控制器(15)的控制增益矩阵为 $K_1=-0.0027, K_2=0.0019$, 系统仿真见图4, 其初始函数为 $x(\theta)=[-0.5, 0.5, 0.65]^T, \theta \in N(-2, 0)$.

例3 考虑系统(14), 其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.7 & 0.5 & 0.45 \\ 0.4 & 0.1 & 1.01 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.31 & 0.2 \\ -0.01 & 0.3 & 0.01 \\ 0.1 & -0.05 & 0.1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

由图5易知系统(27)不稳定. 下面考虑设计全阶近周期脉冲控制器(20), 其中脉冲输入矩阵 $\tilde{\mathbb{C}}=[1, 0, 1]$. 假设 $\{t_k\} \in S(2,1)$, 选取 $\epsilon=0.91$, 求得使定理3中的矩阵不等式有可行解的常时滞 τ 的最大上界是 $\tau=6$, 对应的全阶控制器(20)的控制增益矩阵为 $K=[-0.6327, -0.0996, -0.3653]^T$. 当初始函数为 $x(\theta)=[-0.5, 0.5, 0.65]^T, \theta \in N(-6, 0)$ 时, 系统(27)和全阶脉冲控制器(20)构成的闭环系统的状态轨迹见图6.

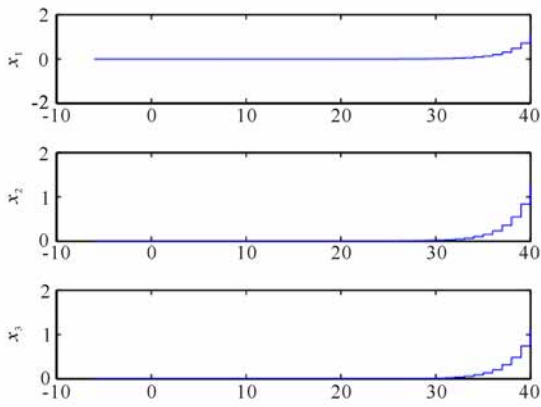


图5 系统(27)的状态轨迹, $\tau = 6$

Fig. 5 The state trajectories of system(27), $\tau = 6$

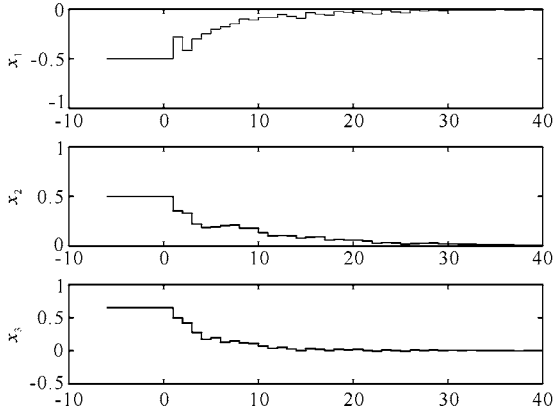


图6 系统(27)在全阶近周期脉冲控制器(20)作用下的状态轨迹, $\tau = 6, \{t_k\} \in S(2,1)$

Fig. 6 The state trajectories of system (27) under full-order nearly-periodic impulsive controller (20), $\tau = 6, \{t_k\} \in S(2,1)$

5 结论

本文研究了带近周期脉冲的离散线性时滞系统的稳定和镇定问题. 根据近周期脉冲的特点, 运用增维、线性差分包含和凸组合技术, 构造了一个新颖的时变 Lyapunov 函数进行稳定性分析, 得到一个基于线性矩阵不等式的稳定性充分条件. 该稳定性结果适用于原来的离散线性时滞子系统和脉冲子系统均不稳定的复杂情况. 在稳定性判据的基础上, 给出了降阶和全阶近周期脉冲控制器的设计方法. 如何把本文的方法推广到变时滞的离散线性脉冲系统, 将是下一步的研究重点.

参考文献:

[1] Amato F, Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 724-729.
 [2] Ebihara Y, Peaucelle D, Arzelier D. Periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for

discrete-time linear systems[J]. Automatica, 2011, 47: 14-25.

[3] Lee D H, Joo Y H, Tak M H. Periodically time-varying memory static output feedback control design for discrete-time LTI systems[J]. Automatica, 2015, 52: 47-54.
 [4] Dong J, Yang G. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties[J]. Automatica, 2013, 49: 1821-1829.
 [5] Wang R, Fei S. New stability and stabilization results for discrete-time switched systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 238: 358-369.
 [6] Chang X H, Yang G H. New results on output feedback H_∞ control for linear discrete-time system[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(5): 1355-1359.
 [7] Guan Z H, Chen G. On delayed impulsive hopfield neural networks[J]. Neural Networks, 1999, 12: 273-280.
 [8] Naghshtabrizi P, Hespanha J P, Teel A R. Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems[J]. Systems Control Letters, 2007, 57(5): 378-385.
 [9] Chen W H, Zheng W X. Robust stability and H_∞ control of uncertain impulsive systems with time-delay[J]. Automatica, 2009, 45(1): 109-117.
 [10] Amato F, Ambrosino R, Ariola M, et al. Finite-time stability of linear time-varying systems with jumps[J]. Automatica, 2009, 45: 1354-1358.
 [11] Yuan C, Wu F. Hybrid Synthesis for Almost Asymptotic Regulation of Linear Impulsive Systems with Average Dwell Time[C]. 2014 IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control, Los Angeles, 2014-12-15.
 [12] Wei L N, Chen W H. Global exponential stability of a class of impulsive neural networks with unstable continuous and discrete dynamics[J]. Neurocomputing, 2015, 147: 225-234.
 [13] Chen W H, Zheng W X. Exponential stability of nonlinear time-delay systems with delayed impulse effects [J]. Automatica, 2011, 47(5): 1075-1083.
 [14] Lakshmanan S, Mathiyalagan K, Park J H, et al. Delay-dependent H_∞ state estimation of neural networks with mixed time-varying delays[J]. Neurocomputing, 2014, 129: 392-400.
 [15] Hammami M, Hammami M A, Sen M D. On the uniform exponential stability of time-varying systems subject to discrete time-varying delays and nonlinear delayed perturbations[J/OL]. Mathematical Problems in Engineering, 2015 [2015-01-17]. <http://dx.doi.org/>

- [16] Molchanov A, Pyatnitskiy E. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory[J]. *Systems and Control Letters*, 1989, 13(1):59-64.
- [17] Balluchi A, Murrieri P, Sangiovanni-Vincentelli A L. Controller synthesis on nonuniform and uncertain discrete-time domains[J]. *Hybrid Systems: Computation and Control*, 2005, 3414:118-133.
- [18] Sala A. Computer control under time-varying sampling period: An LMI gridding approach[J]. *Automatica*, 2005, 41(12):2077-2082.
- [19] Hetel L, Daafouz J, Jung C. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10):1668-1674.
- [20] Geromel J C, Colaneri P. Robust stability of time varying polytopic systems[J]. *Systems Control Letters*, 2006, 55:81-85.
- [21] Hetel L, Daafouz J, Jung C. LMI Control Design for A Class of Exponential Uncertain Systems with Application to Network Controlled Switched Systems[C]. *Proceedings IEEE American Control Conference*, 2007: 1401-1406.
- [22] Felicioni F E, Junco S J. A lie algebraic approach to design of stable feedback control systems with varying sampling rate[C]. *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008-07-06:4881-4886.
- [23] Fujioka H. A discrete-time approach to stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10):2440-2445.
- [24] Hu T, Blanchini F. Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions[J]. *Automatica*, 2010, 46(1):190-196.
- [25] Hetel L, Kruszewski A, Perruquetti W, et al. Discrete and intersample analysis of systems with aperiodic sampling[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(7):1689-1701.
- [26] Hetel L, Daafouz J, Tarbouriech S, et al. Stabilization of linear impulsive systems through a nearly-periodic reset[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 7: 4-15.

(责任编辑:米慧芝)

(上接第 429 页 Continue from page 429)

- [17] Huang T W, Li C D. Chaotic synchronization by the intermittent feedback method [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010, 234:1097-1104.
- [18] Huang J, Li C, Han Q. Stabilization of delayed chaotic neural networks by periodically intermittent control [J]. *Circuits System Signal Process*, 2009, 28(4):567-579.
- [19] Liu X Z, Shen X M, Zhang H T. Intermittent impulsive synchronization of chaotic delayed neural networks [J]. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2011, 19(1-2):149-169.
- [20] Chen W H, Zhong J C, Jiang Z Y, et al. Periodically intermittent stabilization of delayed neural networks based on piecewise lyapunov functions/functionals[J]. *Circuits Syst Signal Process*. DOI: 10. 1007/s00034 - 014-9827-0.
- [21] Estrada T, Antsaklis P J. Stability of Model-Based Networked Control Systems with Intermittent Feedback [C]. *Proceedings of the 17th World Congress, The International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6-11, 2008*:12581-12586.
- [22] Zhu H B, Cui B T. Stabilization and synchronization of chaotic systems via intermittent control [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2010, 15:3577-3586.
- [23] Huang G J, Chen W H. A revisit to the design of switched observers for switched linear systems with unknown inputs [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2014, 12(15):1-9.

(责任编辑:尹 闯)