网络优先数字出版时间:2016-07-13 【DOI】10.13656/j.cnki.gxkx.20160713.007
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/45.1206.G3.20160713.0857.014.html

次领头阶低能常数的改进*

Improvement of the Next Leading Order Low-energy Constants

蒋绍周,蒋杰臣
JIANG Shaozhou,JIANG Jiechen

(广西大学物理学院,广西大学-国家天文台天体物理和空间科学研究中心,广西南宁 530004)
(Department of Physics,GXU-NAOC Center for Astrophysics and Space Sciences,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:【目的】通过合适的处理,减少低能赝标介子手征微扰理论中出现的输入参数,得到符合实验的低能常数理论值,提高理论的预言性。**【方法】**将已有方法中出现的 Schwinger-proper time 方法引入的 Λ 趋于无穷,并通过在介子质量 770 MeV 处对领头阶的低能常数进行重整化。借助 Schwinger-Dyson 方程,得到所有的次领头阶低能常数。**【结果】**通过参数的调节,以及低能常数和耦合常数参数的关系,找到一组符合实验的参数值;减少 Λ 和 F_0 两个输入参数可以得到三味和两味的低能常数。**【结论】**减少 Λ 和 F_0 两个输入参数处理低能常数的方法是可行的。两味的低能常数对耦合常数中参数的依赖比较大,而三味的对其依赖相对较小。

关键词:手征微扰理论　耦合常数　低能常数
中图分类号:O412.3　**文献标识码:**A　**文章编号:**1005-9164(2016)03-0202-04

Abstract:【Objective】There is not an effective way to calculate the low-energy constants (LECs) for the pseudoscalar meson chiral perturbation theory. There are too many input parameters, which reduce the predictability of the theory. Reducing the input parameters in the calculation was carried out through the appropriate treatment, in order to get a set of theoretical values that are consistent with the experiments. **【Methods】**The Schwinger-proper time method was introduced into the Λ to infinity, and a leading order of the LECs was renormalized in the meson mass at 770 MeV. All the next leading order LECs can be obtained through Schwinger-Dyson equation. **【Results】**A set of parameters that match the experiments was obtained through measuring parameters and comparing the relationships between the LECs and coupling constants. Finally the input parameters Λ and F_0 were reduced in the three-flavor and two-flavor quark. **【Conclusion】**The new method that treats LECs by reducing the input parameters is feasible. Two-flavor LECs are sensitive to the coupling constants, but three-flavor LECs are not.

Key words: chiral perturbation theory, coupling constants, low-energy constants

0 引言

【研究意义】量子电动力学的计算值和实验值符合得很好,主要原因在于其可以通过耦合常数($\alpha \approx 1/137$)做展开,进行微扰计算[1]。但是,对于量子色动力学(QCD)来说,微扰理论不再适用,一般需要进行非微扰计算。非微扰现象的原因在于 QCD 的耦

收稿日期:2016-05-13
修回日期:2016-06-20
作者简介:蒋绍周(1982－),男,博士,副教授,硕士生导师,主要从事粒子物理理论方向的研究。
* 国家自然科学基金项目(11565004)资助。

合常数随着动量的减小而增大，因此，对于低能 QCD 的相互作用，不能采用原来比较成熟的微扰论来处理。手征微扰理论是一种有效处理低能赝标介子相互作用的方法[2-4]，但该理论中起重要作用的低能常数还未能通过解析的办法得到。目前一种常用的求解方式是借助耦合常数，将耦合常数和夸克自能联系起来[5-6]，进而求解出低能常数，且该方法已经取得了一些进展[7]。**【前人研究进展】**目前，低能常数与夸克自能、夸克自能与耦合常数的关系都已有一定精度下的理论结果[5-7]。文献[7]较精确地计算到次次领头阶低能常数；文献[8]研究耦合常数对次领头阶低能常数的影响；更有 Maris-Tandy 模型和 Qin-Chang 模型[9-10]不需要额外输入参数，就能计算出低能耦合常数。**【本研究切入点】**已有的低能常数求解方法需要输入的参数相对较多，除耦合常数之外，还需要 Schwinger-proper time 方法引入的截断参数 Λ 和领头阶的低能常数 F_0。因此，理论的预言性不是很强。为提高理论的预言性，本研究取消 Λ 和 F_0 两个输入参数，仅保留耦合常数作为输入。**【拟解决的关键问题】**利用 Maris-Tandy 模型和 Qin-Chang 模型的耦合常数，通过 Schwinger-Dyson(SD)方程求出夸克自能，并计算出所有次领头阶低能常数。在输入参数减少之后，已有的耦合常数并不适用于现在问题，需对已有的耦合常数参数进行适当修改，以期其与实验值相符。

1 夸克自能的求解

对于以前的耦合常数形式，主要以分段函数的形式为主[11]，该形式连接点的二阶导数不连续，会对低能常数的全微分关系产生影响，并且还包含待定参数 Λ_{QCD}。文献[8]采用的耦合常数同样存在待定常数，计算时需要调节待定常数，理论预言性低。因此我们采用下面两种有比较确定形式的耦合常数进行讨论[9-10]：

$$\alpha_{s1}(p^2)=(\frac{\pi}{\omega^6}Dp^2e^{-p^2/\omega^2}+\frac{2\pi\gamma_m F(p^2)}{\ln[\tau+(1+p^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]})(p^2+m_g^2(p^2)), \quad (1)$$

$$\alpha_{s2}(p^2)=(\frac{2\pi}{\omega^4}De^{-p^2/\omega^2}+\frac{2\pi\gamma_m F(p^2)}{\ln[\tau+(1+p^2/\Lambda_{QCD}^2)^2]})(p^2+m_g^2(p^2))。 \quad (2)$$

(1)式为 Maris-Tandy 模型，(2)式为 Qin-Chang 模型，式中的 $N_f=4$，$\gamma_m=12/(33-2N_f)$，$\Lambda_{QCD}=0.234$ GeV，$\tau=e^2-1$，$m_g^2(p^2)=M_g^4/(M_g^2+p^2)$，$M_g=0.81$ GeV，$F(p^2)=\{1-e(-p^2/4m_t^2)\}/p^2$，$m_t=0.5$ GeV，ω 和$(D\omega)^{1/3}$ 取文献[9-10]中给出的典型值。

利用上面的耦合常数就可以通过 SD 方程求出夸克自能 $\Sigma(p^2)$。经过大 N_C 展开，做梯形近似和角近似之后的 SD 方程为[5]

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dp^2}\dfrac{\Sigma'(p^2)}{(\dfrac{\alpha_s(p^2)}{p^2})'}-\dfrac{3N_C}{8\pi}p^2\dfrac{\Sigma(p^2)}{p^2+\Sigma^2(p^2)}=0,\\ \Sigma'(0)+\dfrac{3N_C}{16\pi}\dfrac{\alpha_s(0)}{\Sigma(0)}=0,\\ \Sigma(\bar{\Lambda}^2)-\dfrac{3N_C}{8\pi}\dfrac{\alpha_s(\bar{\Lambda}^2)}{\bar{\Lambda}^2}\int_0^{\bar{\Lambda}^2}dq^2\dfrac{q^2\Sigma(q^2)}{q^2+\Sigma^2(q^2)}=0。\end{cases} \quad (3)$$

其中，$\bar{\Lambda}^2$ 为积分截断。通过 α_s 的渐近行为，可以解析得到 $\Sigma(p^2)$ 的渐近行为如下[5]：

$$\Sigma(p^2)\xrightarrow{p^2\to\infty}\frac{\ln^{\gamma-1}(p^2/\Lambda_{QCD}^2)}{p^2}, \quad (4)$$

其中，$\gamma=9N_C/2(33-2N_f)$。方程(3)没有解析解，但是可以通过数值方法求出，而(4)式可以检验数值求解夸克自能的正确性。

2 低能常数的计算

文献[5,7]给出的低能常数和 Schwinger-proper time 方法引入的截断 Λ 有关。原来的处理方法考虑到理论适用于低能范围，随意选取 $\Lambda=1$ GeV，但实际计算发现，低能常数的最后结果和 Λ 有较大关系。为提高理论的预言性，不引入额外的截断参数，需要将 Λ 趋于无穷。该操作相当于保留 Schwinger-proper time 方法丢失掉的有限项，并且忽略一个和理论无关的、拉氏量中趋于无穷的常数项。该操作引入的代价是计算领头阶的夸克凝聚项 ($F_0^2B_0$) 时会出现发散：

$$F_0^2B_0(\Lambda^2,\Lambda_{QCD}^2)\propto\ln^{\gamma}(\Lambda^2/\Lambda_{QCD}^2)。 \quad (5)$$

采用文献[5]的方法，取 $\mu=770$ MeV 作为 $F_0^2B_0$ 的重整化标度（以下计算都取 $F_0^2B_0$ 在此标度的值 $F_0^2B_{0r}$）。另外，(5)式也可以检验数值计算的正确性。利用文献[5,7]给出的低能常数和夸克自能的关系，就能得到相应的低能常数。同时，在整个计算过程中，也不会出现原来方法存在的 π 介子零级近似 F_0 的情况。一般来说三味的结果对耦合常数的依赖比较弱，所以我们先对两味的情况进行计算，取(1)、(2) 式的夸克味道 $N_f=2$，所得结果如表 1 所示。

从表 1 中可以发现，所得到的低能常数和文献给出的结果差别很大，其中 $\bar{l}_3$ 的正负号甚至是相反的。这是因为文献[9-10]给出耦合常数的参数是在 $N_f=4$ 时给出的，不合适直接用在 $N_f=2$ 上。因此，

我们需要对耦合常数中的参数进行调整，才能适用于两味和三味夸克的计算。选取的调整参数主要为 Λ_{QCD}、ω 和 $(D\omega)^{1/3}$，调整后的结果见表 2，表 3(其中，夸克凝聚 $(\bar{\psi}\psi)_r = -N_f F_0^2 B_{0r}$)。

表 1　两种不同耦合常数得到的低能常数

Table 1　LECs obtained from the two kinds of the coupling constants

耦合常数 Coupling constants	低能常数 Low-energy constants					
	$\bar{l}_1$	$\bar{l}_2$	$\bar{l}_3$	$\bar{l}_4$	$\bar{l}_5$	$\bar{l}_6$
$\alpha_{s1}(p^2)$	−4.73	7.70	−0.68	4.08	22.12	21.86
$\alpha_{s2}(p^2)$	−6.99	8.82	−0.70	4.08	26.34	26.33
文献[3] Reference[3]	−2.3±3.7	6.0±1.3	2.9±2.4	4.3±0.9	13.9±1.3	16.5±1.1
文献[12] Reference[12]	−0.4±0.6	4.3±0.1	2.9±2.4	4.4±0.2	12.24±0.21	16.0±0.5±0.7

表 2　调节耦合常数 $\alpha_{s1}(p^2)$ 得到的低能常数

Table 2　LECs obtained by adjusting the coupling constant $\alpha_{s1}(p^2)$

序号 No.	Λ_{QCD} (MeV)	ω (GeV)	$(D\omega)^{1/3}$ (GeV)	$\bar{l}_1$	$\bar{l}_2$	$\bar{l}_3$	$\bar{l}_4$	$\bar{l}_5$	$\bar{l}_6$	$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_r^{1/3}$ (MeV)
1	150	0.40	0.72	−4.74	7.70	−1.09	4.11	22.24	21.88	526.48
2	200	0.40	0.72	−4.74	7.70	−1.14	4.13	22.19	21.87	394.43
3	300	0.40	0.72	−4.73	7.70	−1.26	4.18	22.07	21.83	261.87
4	400	0.40	0.72	−4.71	7.69	−1.42	4.26	21.92	21.76	194.66
5	500	0.40	0.72	−4.69	7.68	−1.67	4.37	21.75	21.69	152.91
6	600	0.40	0.72	−4.66	7.67	−2.01	4.57	21.56	21.60	122.32
7	234	0.31	0.72	−9.69	10.12	−1.18	4.06	31.83	31.76	277.86
8	234	0.35	0.72	−7.29	8.95	−1.19	4.09	27.08	26.93	305.01
9	234	0.40	0.72	−4.74	7.70	−1.18	4.15	22.15	21.86	336.76
10	234	0.45	0.72	−2.61	6.67	−1.12	4.21	18.14	17.71	365.73
11	234	0.50	0.72	−0.86	5.85	−1.02	4.29	14.93	14.42	391.43
12	234	0.60	0.72	1.52	4.82	−0.61	4.51	10.41	10.35	429.94
13	234	0.40	0.40	1.19	4.96	−0.29	4.36	10.84	10.84	284.11
14	234	0.40	0.70	−4.40	7.54	−1.15	4.15	21.50	21.20	335.04
15	234	0.40	0.75	−5.23	7.94	−1.21	4.14	23.10	22.82	339.15
16	234	0.40	0.80	−6.01	8.32	−1.27	4.13	24.62	24.38	342.73
17	234	0.40	0.85	−6.76	8.68	−1.31	4.12	26.08	25.87	345.88
18	234	0.40	0.90	−7.46	9.03	−1.36	4.11	27.47	27.29	348.67

表 3　调节耦合常数 $\alpha_{s2}(p^2)$ 得到的低能常数

Table 3　LECs obtained by adjusting the coupling constant $\alpha_{s2}(p^2)$

序号 No.	Λ_{QCD} (MeV)	ω (GeV)	$(D\omega)^{1/3}$ (GeV)	$\bar{l}_1$	$\bar{l}_2$	$\bar{l}_3$	$\bar{l}_4$	$\bar{l}_5$	$\bar{l}_6$	$-\langle\bar{\psi}\psi\rangle_r^{1/3}$ (MeV)
1	230	0.40	0.72	−6.99	8.82	−1.04	4.14	26.35	26.34	305.83
2	250	0.40	0.72	−6.98	8.82	−1.06	4.15	26.31	26.31	281.38
3	300	0.40	0.72	−6.96	8.81	−1.11	4.17	26.21	26.25	234.40
4	360	0.40	0.72	−6.93	8.79	−1.18	4.20	26.10	26.18	200.62
5	400	0.40	0.72	−6.90	8.78	−1.26	4.24	25.99	26.11	175.00
6	234	0.40	0.72	−6.99	8.82	−1.05	4.14	26.35	26.33	300.61
7	234	0.45	0.72	−5.12	7.91	−1.01	4.19	22.65	22.63	324.20
8	234	0.50	0.72	−3.55	7.16	−0.95	4.24	19.59	19.58	345.10
9	234	0.55	0.72	−2.24	6.54	−0.85	4.30	17.04	17.09	363.12
10	234	0.60	0.72	−1.16	6.05	−0.72	4.36	14.93	15.08	378.00
11	234	0.70	0.72	0.44	5.35	−0.34	4.47	11.76	12.33	396.98
12	234	0.40	0.20	1.74	4.88	1.40	4.25	9.05	10.51	162.02
13	234	0.40	0.30	−0.03	5.55	0.13	4.27	12.56	13.08	220.52
14	234	0.40	0.40	−1.90	6.39	−0.41	4.23	16.25	16.44	253.09
15	234	0.40	0.50	−3.67	7.22	−0.70	4.19	19.73	19.79	273.70
16	234	0.40	0.60	−5.27	7.99	−0.89	4.16	22.91	22.92	288.09
17	234	0.40	0.70	−6.72	8.69	−1.02	4.14	25.80	25.79	298.78

可见，只有表3中的第13组参数得到的低能常数符合文献[3,12]所给出的结果，该组参数得到的夸克凝聚结果也大致与文献[13-14]给出－(250 MeV)^3 相符。对大部分的参数来说，参数的调整对夸克凝聚能量的影响都不是很大，其结果都在－(250 MeV)^3 左右。

类似地，我们可以得到三味夸克的结果。一般来说，需要重新调整耦合常数相应的参数来求解三味的夸克自能。但是，在实际的数值计算中发现，这些参数对三味的低能常数的影响并不大。另外，四味的结果包含的 c 夸克较重，和手征微扰论适用的低能范围差距较远，因此我们不考虑四味夸克的结果。由表4可见，三味的低能常数和其他通过实验得到的结果[4,12]基本符合。因此，本研究采取的处理是合理的。

表4　$N_f=3,(D\omega)^{1/3}=0.3$ GeV 时对应的低能常数

Table 4　LECs in $N_f=3,(D\omega)^{1/3}=0.3$ GeV

项目 Item	低能常数 Low-energy constants									
	10^3L_1	10^3L_2	10^3L_3	10^3L_4	10^3L_5	10^3L_6	10^3L_7	10^3L_8	10^3L_9	10^3L_{10}
结果 Result	0.56	1.13	−2.95	0	1.36	0	−0.53	1.33	5.10	−4.83
文献[4] Reference[4]	0.9±0.3	1.7±0.7	−4.4±2.5	0±0.5	2.2±0.5	0.0±0.3	−0.4±0.15	1.1±0.3	7.4±0.7	−6.0±0.7
文献[12] Reference[12]	0.53±0.06	0.81±0.04	−3.07±0.20	≡0.3	1.01±0.06	0.14±0.05	−0.34±0.09	0.47±0.10	5.93±0.43	−3.8±0.4

3　结论

本研究改进已有的计算低能常数的做法，在计算中将 Schwinger-proper time 方法引入的 Λ 趋向于无穷，消除其任意性；并且利用两种确定形式的耦合常数形式，消除 F_0 这个输入参数，从而提高理论的预言性。但是，引入的代价是需要对原有的四味耦合常数进行调节，以使得 $\bar{l}_3$ 这个两味的低能常数和实验值相符。通过调整相关参数，发现只有表3中的第13组参数符合条件，并且这组参数同样适用于三味的情况。

参考文献：

[1]　PESKIN M E,SCHROEDER D V. An Introduction to Quantum Field Theory[M]. [S. l.]: Westview Press, 1995.

[2]　WEINBERG S. Phenomenological lagrangians[J]. Physica A,1979,96:327-340.

[3]　GASSER J,LEUTWYLER H. Chiral perturbation theory to one loop[J]. Annals of Physic,1984,158:142-210.

[4]　GASSER J,LEUTWYLER H. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark[J]. Nuclear Physics B,1985,250:465-516.

[5]　YANG H,WANG Q,KUANG Y P,et al. Calculation of the chiral lagrangian coefficients from the underlying theory of QCD: A simple approach[J]. Physical Review D,2002,66:014019.

[6]　YANG H,WANG Q,LU Q. Chiral lagrangian from gauge invariant, nonlocal, dynamical quark model[J]. Physics Letters B,2002,532:240-248.

[7]　JIANG S Z,WEI Z L,CHEN Q S,et al. Computation of the O(p6) order low-energy constants: An update[J]. Physical Review D,2015,92:025014.

[8]　陈清森，蒋绍周. 低能跑动耦合常数形式对低能常数的影响研究[J]. 广西科学,2015,22(1):109-112.
CHEN Q S, JIANG S Z. The form of the low-energy coupling constant and its influence on the low-energy constants[J]. Guangxi Sciences,2015,22(1):109-112.

[9]　MARIS P,TANDY P. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants[J]. Physical Review C,1999,60:055214.

[10]　QIN S X,CHANG L,LIU Y X,et al. Interaction model for the gap equation[J]. Physical Review C,2011,84:042202.

[11]　AOKI K I,BANDO M,KUGO T. Calculating the decay constant f_π [J]. Progress of Theoretical Physics, 1990,84(4):683-701.

[12]　BIJNENS J,ECKER G. Mesonic low-energy constants [J]. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 2014,64:149-174.

[13]　BURGER F,LUBICZ V,MÜLLER-PREUSSKER M, et al. Quark mass and chiral condensate from the Wilson twisted mass lattice quark propagator[J]. Physical Review D,2013,87:034514.

[14]　BERNARD V,DESCOTES-GENON S,TOUCAS G. Topological susceptibility on the lattice and the three-flavour quark condensate[J]. Journal of High Energy Physics,2012(6):051. DOI: 10.1007/JHEP06(2012)051.

（责任编辑：米慧芝）