

# 一类非线性系统的非周期间歇 $H_\infty$ 同步\* Aperiodically Intermittent $H_\infty$ Synchronization for a Class of Nonlinear System

刘利军,陈武华\*\*,卢小梅

LIU Lijun, CHEN Wuhua, LU Xiaomei

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:**基于  $H_\infty$  控制理论研究一类非线性系统的间歇  $H_\infty$  同步问题. 针对间歇控制具有切换控制的特征,通过构造时变切换的 Lyapunov 函数并结合凸组合技术,分析误差系统的稳定性和  $L_2$ -增益性能;基于线性矩阵不等式技术,设计非周期间歇  $H_\infty$  同步控制器;用数值例子验证所提出方法的有效性. 与以往结果相比,本文提出的间歇控制窗口宽度和休息窗口宽度是可变的,即非周期间歇控制,而且新提出的 Lyapunov 函数在闭环和开环模式上都是非增的,保证同步误差系统是内指数稳定并且具有规定  $L_2$ -增益.

**关键词:**非线性系统 切换 Lyapunov 函数  $H_\infty$  同步 间歇控制

**中图分类号:**TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2016)04-0366-08

**Abstract:** The external disturbances are inevitable in the synchronization process. In this paper, the  $H_\infty$  synchronization problem for a class of nonlinear system is investigated via intermittent control based on the  $H_\infty$  control theory. Different from the previous results, the control and rest window width are variable in this paper, that is aperiodically intermittent control. Owing to the switching characteristics of intermittent control, a switching-time-various Lyapunov function combined with the convex combination technique is applied to analyze the stability and  $L_2$ -gain performance of error system. It is worth mentioning that the Lyapunov function proposed in this paper is non-increasing in the closed-model and open-model. By linear matrix inequality technique, the aperiodically intermittent  $H_\infty$  synchronization feedback controller is presented, which can ensure the internally exponential stability and have a prescribed  $L_2$ -gain. Finally, a numerical example demonstrates the effectiveness of the obtained results.

**Key words:** nonlinear systems, switching Lyapunov function,  $H_\infty$  synchronization, intermittent control

收稿日期:2016-05-25

作者简介:刘利军(1991-),男,硕士研究生,主要从事非线性系统与分布参数系统的分析与设计。

\* 国家自然科学基金项目(61573111)和广西自然科学基金重点项目(2013GXNSFDA019003,2015GXNSFAA139003)资助。

\*\* 通讯作者:陈武华(1967-),男,教授,主要从事系统控制研究,E-mail: wuhua\_chen@163.com。

## 0 引言

混沌系统的控制与同步是当代非线性科学的研究热点. 随着控制工程与控制理论的发展,人们提出了不同的控制策略. 如文献[1]和文献[2]分别应用线性反馈和非线性反馈控制方法研究混沌系统的同步问题;文献[3]利用自适应控制策略研究一类非线性系统的非光滑观测器的设计问题;文献[4]和文献[5]分别运用反步设计和滑膜控制研究混沌系统的同步

问题;文献[6-10]基于线性矩阵不等式,通过脉冲控制策略建立混沌系统的同步判据;文献[11-14]通过间歇控制探讨系统的同步问题.在以上的控制策略中,不连续的控制有脉冲控制和间歇控制.与连续控制相比,不连续控制的控制成本低,容易实施并且具有较强的鲁棒性.不连续控制中,脉冲控制只是在某些离散点处进行控制.间歇控制是控制器工作一段时间之后再休息一段时间,如此周而复始.间歇控制使系统具有更好的闭环性能和较高的控制成本.故间歇控制策略被广泛应用于系统镇定<sup>[15-17]</sup>与同步<sup>[18]</sup>研究以及观测器设计<sup>[19]</sup>等方面.然而,上述文献的间歇控制的控制窗口宽度与休息宽度都是固定的,也即周期间歇控制.但实际应用中要求控制是周期的,这是不合理的或者是不必要的.某些情况下,非周期间歇更符合实际系统的应用.例如,风能发电或太阳能发电系统是经典的非周期间歇控制系统.文献[20-21]应用非周期间歇控制研究系统的镇定与同步.

而在实际操作过程中,噪音和外部干扰普遍存在.比如,同步信号从驱动系统传输到响应系统的工程中,外部环境中的干扰不可避免.然而,干扰的存在可能会破坏系统的稳定性与同步现象.故干扰抑制同步控制器的设计就成为一个尤为重要的问题.在干扰输入信号平方可积的情况下, $L_2$ -增益概念提供了 $L_2$ 扰动输入信号对输出信号灵敏度的数值度量. $H_\infty$ 同步控制是消除外部干扰对系统性能影响的有效方法.文献[22]得到了不确定神经网络时滞相关的 $H_\infty$ 同步判据.文献[23]提出滑膜控制方法来研究具有混合时滞系统的 $H_\infty$ 同步问题.文献[24]基于分布脉冲控制策略研究一类具有耦合时滞和干扰信号的复杂动态网络的在 $H_\infty$ 同步问题. $H_\infty$ 同步的目的就是设计控制律(状态反馈或者输出反馈),使得闭环系统在零干扰任意初始值的情况下,系统内稳定且在零初始时系统具有有限 $L_2$ -增益.混沌系统的间歇 $H_\infty$ 同步问题未见有报道,而解决该问题的最大难点就是如何构造合适的Lyapunov函数使得系统在开环模式下具有有限的 $L_2$ -增益.

本文提出非周期间歇 $H_\infty$ 同步方案,保证误差系统指数稳定和误差干扰输出具有规定的 $L_2$ -增益.对于给定的间歇切换信号,非周期间歇 $H_\infty$ 同步控制器的增益可以通过求解一组线性矩阵不等式得到.主要创新点如下:(1)基于 $H_\infty$ 同步理论,以量化的形式分析干扰对误差系统的影响并且考虑了间歇 $H_\infty$ 控制设计;(2)与文献[12-19]中相比,本文中的间歇控制的控制宽度和休息宽度可变;(3)构造的时变切换的

Lyapunov函数更能够考虑系统的切换特性,使得同步判据具有更小的保守性.

符号说明:矩阵 $P > 0 (\geq 0, < 0, \leq 0)$ 表示 $P$ 为正定(半正定、负定、半负定)矩阵; $I$ 表示适当维数的单位矩阵; $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(P)$ 分别表示矩阵 $P$ 的最大和最小特征值; $\|\cdot\|$ 表示为欧几里德范数; $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

## 1 问题描述

考虑如下常微分方程描述的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 f(x(t)), \\ y(t) = Cx(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^n, y(t) \in R^m$ 分别是系统的状态与系统的输出; $A_0, A_1 \in R^{n \times n}$ 为已知的常系数矩阵; $C \in R^{m \times n}, m < n$ 为系统的控制输出矩阵; $x_0 \in R^n$ 为系统的初值. $f(\cdot): R^n \rightarrow R^n$ 为非线性函数并且满足 $f(0) = 0$ 和如下假设:

(H1)对任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,存在 $\underline{\kappa}_i, \bar{\kappa}_i$ ,使得如下不等式成立:

$$\underline{\kappa}_i \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq \bar{\kappa}_i, x \neq y. \quad (2)$$

系统(1)为驱动系统,相应的响应系统具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + A_1 f(\hat{x}(t)) + Bu(t) + D_1 w(t), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + D_2 w(t), \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\hat{x}(t) \in R^n, u(t) \in R^r, \hat{y}(t) \in R^m$ 分别为系统的状态、控制输入和控制输出; $w(\cdot) \in L_2(0, +\infty)$ 为外部干扰; $B, D_1, D_2$ 为适合维数的常量矩阵.间歇控制的研究中,控制器的激活时间是分段不连续的.时间 $\mathbb{R}_+$ 可以看作作为时间区间 $[t_{1,k-1}, t_{1k}]$ , $k \in \mathbb{N}$ 的并集,并且满足 $0 = t_{10} \leq t_{11} \leq \dots \leq t_{1,k-1} \leq t_{1k} \leq \dots$ , $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{1k} \rightarrow \infty$ .每个时间区间又分为控制器激活时间区间 $[t_{1,k-1}, t_{2,k-1})$ 和控制器休息时间区间 $[t_{2,k-1}, t_{1k})$ .采用如下形式的状态反馈控制器:

$$u(t) = K(t)(x(t) - \hat{x}(t)), \quad (4)$$

其中,

$$K(t) = \begin{cases} -K, t \in \Delta_{1k} \triangleq [t_{1,k-1}, t_{2,k-1}), \\ 0, t \in \Delta_{2k} \triangleq [t_{2,k-1}, t_{1k}), \end{cases} k \in \mathbb{N}.$$

定义同步误差: $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ .根据驱动系统(1)、响应系统(3)和控制器(4),可得误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A_0 + BK)e(t) + A_1 \hat{f}(e(t)) - D_1 w(t), t \in \Delta_{1k}, \\ \dot{e}(t) = A_0 e(t) + A_1 \hat{f}(e(t)) - D_1 w(t), t \in \Delta_{2k}, \\ y_e = Ce(t) - D_2 w(t), \\ e(0) = e_0, \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\hat{f}(e(t)) = f(x(t)) - f(\hat{x}(t))$ ,  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ . 根据假设(H1)可知  $\hat{f}(\cdot)$  满足如下不等式:

$$\underline{\kappa}_i \leq \frac{\hat{f}_i(e_i)}{e_i} \leq \bar{\kappa}_i, e_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

与周期间歇控制相比,非周期间歇控制允许控制周期  $t_{1k} - t_{1,k-1}$  与控制宽度  $t_{2,k-1} - t_{1,k-1}$  是变化的. 为了刻画系统的切换特征,引入如下切换信号函数:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, t \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_{1k}, \\ 2, t \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_{2k}, \end{cases} k \in \mathbb{N}.$$

给出间歇切换时间序列满足的容许值:

$$S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22}) = \{\sigma(t) : \delta_{i1} \leq t_{3-i,k+i-2} - t_{i,k-1} \leq \delta_{i2}, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2\}.$$

间歇  $H_\infty$  同步问题:对于给定的干扰抑制  $\gamma$  和给定间歇切换时间序列  $S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22})$ ,设计间歇控制器  $K$ ,使以下条件成立:

(i) 当外部干扰  $w(\cdot) = 0$  时,误差系统的零解是一致指数稳定(UES),即存在正标量  $M, \beta$ ,使得如下不等式成立:

$$\|e(t)\|_2 \leq M \|e_0\|_2 e^{-\beta t}, \forall t \geq 0.$$

(ii) 当初始值  $e_0 = 0$  时,同步误差系统(5)的控制输出  $y_e(t)$  满足

$$\int_0^t \|y_e(s)\|_2^2 ds \leq \gamma^2 \int_0^t \|w(s)\|_2^2 ds, \forall t \geq 0. \quad (7)$$

引理 1<sup>[17]</sup> 对给定的  $U^{n \times n}$  矩阵和正定矩阵  $X$ ,对任意的正常数  $\epsilon$ ,如下不等式成立:

$$U X^{-1} U^T \geq \epsilon(U + U^T) - \epsilon^2 X.$$

引理 2<sup>[17]</sup> 给定的矩阵  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times N}$ ,  $E_i \in R^{n \times N}$ ,  $\Xi_i = \Xi_i^T$ ,  $X_0, X_i, H_i \in R^{n \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 如果如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} E_i + B X_0 A + (B X_0 A)^T & (X_i - X_0) A^T + B H_i \\ * & -H_i - H_i^T \end{bmatrix} < 0,$$

$i = 1, 2, \dots, N$ ,

则下列不等式也成立:

$$E_i + B X_i A + (B X_i A)^T < 0, i = 1, 2, \dots, N.$$

## 2 稳定性分析

通过引入时变 Lyapunov 函数,结合凸组合技术和线性矩阵不等式技术,解决间歇  $H_\infty$  同步问题. 首先引入相关的分段函数:

$$\rho_0(t) = \frac{1}{t_{3-i,k+i-2} - t_{i,k-1}}, t \in \Delta_{ik}, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2,$$

$$\rho_1(t) = \frac{t - t_{i,k-1}}{t_{3-i,k+i-2} - t_{i,k-1}}, t \in \Delta_{ik}, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2,$$

$$\tilde{n}_1(t) = \frac{\rho_0(t) - 1/\delta_{i2}}{1/\delta_{i1} - 1/\delta_{i2}}, t \in \Delta_{ik}, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2.$$

由  $\rho_0(t), \rho_1(t), \tilde{n}_1(t)$  的定义可以推得

$$\rho_0(t) = \frac{\tilde{n}_1(t)}{\delta_{i1}} + \frac{\tilde{n}_2(t)}{\delta_{i2}}, t \in \Delta_{ik}, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2,$$

和

$$\rho_1(t_{i,k-1}) = 0, \rho_1(t_{20}^-) = \rho_1(t_{ik}^-) = 1, k \in \mathbb{N}, i = 1, 2. \quad (8)$$

定义:  $\rho_2(t) = 1 - \rho_1(t)$ ,  $\tilde{n}_2(t) = 1 - \tilde{n}_1(t)$ .

**定理 1** 给定控制增益矩阵  $K \in R^{m \times n_c}$  和间歇切换时间序列  $S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22})$ ,考虑同步误差系统(5)满足(6)式. 那么对于给定正标量  $\mu_1, \mu_2, \gamma$ ,若存在  $n \times n$  正定矩阵  $P_{ij}$ ,  $j = 1, 2$  和正定对角矩阵  $\Lambda_{ijh}$ ,  $i, j, h = 1, 2$ ,使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{aligned} E_{ijh} = & \begin{bmatrix} \Omega_{ijh} & P_{ij} A_1 + \Lambda_{ijh} L_2 & -P_{ij} D_1 & C^T \\ * & -\Lambda_{ijh} & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_0 \gamma^2 I & -D_2^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, i, j, \\ & h = 1, 2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$P_{i2} \leq \mu_{3-i} P_{3-i,1}, i = 1, 2, \quad (10)$$

其中,  $\mu_0 = \frac{\min\{\mu_1, \mu_2, 1\}}{\max\{\mu_1, \mu_2, 1\}}$ ,  $A_{01} = A_0 + BK$ ,  $A_{02} = A_0$ ,

$$L_1 = -\text{diag}(\underline{\kappa}_1 \bar{\kappa}_1, \underline{\kappa}_2 \bar{\kappa}_2, \dots, \underline{\kappa}_n \bar{\kappa}_n), L_2 = \frac{1}{2} \text{diag}(\underline{\kappa}_1 + \bar{\kappa}_1,$$

$$\underline{\kappa}_2 + \bar{\kappa}_2, \dots, \underline{\kappa}_n + \bar{\kappa}_n), \Omega_{ijh} = \frac{\ln \mu_i}{\delta_{ih}} P_{ij} + \frac{1}{\delta_{ih}} (P_{i1} - P_{i2}) +$$

$$P_{ij} A_{0i} + A_{0i}^T P_{ij} + \Lambda_{ijh} L_1,$$

则系统(5)关于  $S_\sigma$  一致指数稳定且  $L_2$ -增益小于  $\gamma$ .

**证明** 首先,证明当  $w(\cdot) = 0$  时,误差系统(5)在给定的条件(8)和(9)下是指数稳定的. 在此,把误差系统(5)看作如下切换系统:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A_{0,\sigma(t)} e(t) + A_1 \hat{f}(e(t)), \\ e(0) = e_0. \end{cases} \quad (11)$$

由矩阵不等式(9),(10),对于充分小的正标量  $\beta$ ,条件(10)和如下不等式成立:

$$E_{1ijh} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{ijh} & P_{ij} A_1 + \Lambda_{ijh} L_2 \\ * & -\Lambda_{ijh} \end{bmatrix}, i, j, h = 1, 2, \quad (12)$$

其中,  $\tilde{D}_{ijh} = \frac{\ln \mu_i}{\delta_{ih}} P_{ij} + \frac{1}{\delta_{ih}} (P_{i1} - P_{i2}) + P_{ij} A_{0i} +$

$$A_{0i}^T P_{ij} + \Lambda_{ijh} L_1 + \beta P_{ij}.$$

构造时变的 Lyapunov 候选函数:

$$V(t) = \varphi(t) \sum_{j=1}^2 e(t) \rho_{\sigma(t),j} P_{\sigma(t),j} e(t), \varphi(t) = \mu_{\sigma(t)}^{\rho_1(t)}$$

设  $W(t) = e^{\beta t} V(t)$ , 对任意固定的  $t \in [t_{i,k-1}, t_{3-i,k+i-2})$ ,  $(i,k) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ , 对  $W(t)$  沿着系统(11)的轨线求导可得

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & e^{\beta t} \sum_{j=1}^2 \rho_j(t) \{ e^T(t) [\beta + \rho_0(t) \ln \mu_i] P_{ij} + \\ & \rho_0(t) (P_{i1} - P_{i2}) + P_{ij} A_{0i} + A_{0i} P_{ij} \} e(t) + \\ & 2 e^T(t) P_{ij} \hat{f}(e(t)) \}, \end{aligned}$$

根据不等式(6)可得

$$0 \leq (\kappa_q e_q - \hat{f}_q(e_q)) (\bar{\kappa}_q e_q - \hat{f}_q(e_q)),$$

$q=1,2,\dots,n$ .

设  $\Lambda_{ijh} = \text{diag} \{ \lambda_{ijh1}, \lambda_{ijh2}, \dots, \lambda_{ijhn} \}$ ,  $i,j=1,2$ . 根据上面不等式得

$$\begin{aligned} 0 \leq & e^{\beta t} \varphi(t) \sum_{q=1,j,h=1}^n \sum_{q=1,j,h=1}^2 \rho_j(t) \tilde{n}_h(t) \lambda_{ijh} (\kappa_q e_q - \\ & \hat{f}_q(e_q)) (\bar{\kappa}_q e_q - \hat{f}_q(e_q)) = \sum_{q=1,j,h=1}^n \sum_{q=1,j,h=1}^2 \rho_j(t) \tilde{n}_h(t) \{ e^T(t) \cdot \\ & \Lambda_{ijh} L_1 e(t) + e^T(t) \Lambda_{ijh} L_2 \hat{f}(e(t)) + \\ & (\hat{f}(e(t)))^T \Lambda_{ijh} \hat{f}(e(t)) \}. \end{aligned} \quad (13)$$

把(13)式与  $\dot{W}(t)$  相加可得

$$\dot{W}(t) \leq e^{\beta t} \varphi(t) \sum_{j,h=1}^2 \eta_1^T(t) \rho_j(t) \tilde{n}_h(t) \Xi_{1ijh} \eta_1(t),$$

其中,  $\eta_1(t) = \text{col} \{ e(t), \hat{f}(e(t)) \}$ . 由不等式(11)得到

$$\dot{W}(t) < 0, \forall t \in [t_{i,k-1}, t_{3-i,k+i-2}),$$

所以

$$W(t) < W(t_{i,k-1}), \forall t \in [t_{i,k-1}, t_{3-i,k+i-2}). \quad (14)$$

根据(7)式和(9)式, 给出  $W(t)$  在切换时刻  $t_{i,k-1}$ ,  $(i,k) \in \{1,2\} \times \mathbb{N} - \{1\} \times \{1\}$  处的估计:

$$\begin{aligned} W(t_{i,k-1}) = & e^{\beta t_{i,k-1}} \varphi(t_{i,k-1}) e^T(t_{i,k-1}) \cdot \\ & \sum_{j=1}^2 \rho_j(t_{i,k-1}) P_{ij} e(t_{i,k-1}) = e^{\beta t_{i,k-1}} e^T(t_{i,k-1}) \cdot \\ & P_{i2} e(t_{i,k-1}) \leq e^{\beta t_{i,k-1}} \mu_{3-i} e^T(t_{i,k-1}) P_{3-i,1} e(t_{i,k-1}) \leq \\ & e^{\beta t_{i,k-1}} \mu_{3-i}^{\rho_1(t_{i,k-1})} e^T(t_{i,k-1}) P_{3-i,1} e(t_{i,k-1}) = \\ & e^{\beta t_{i,k-1}} \mu_{3-i}^{\rho_1(t_{i,k-1})} e^T(t_{i,k-1}) P_{3-i,1} e(t_{i,k-1}) = W(t_{i,k-1}). \end{aligned} \quad (15)$$

结合(14)式和(15)式, 得  $W(t) \leq W(0)$ . 可以推出

$$\| e(t) \| \leq \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 \min \{ \mu_1, \mu_2, 1 \}}} \| e_0 \| e^{-\frac{\beta t}{2}},$$

其中,  $\lambda_2 = \lambda_{\max}(P_{12})$ ,  $\lambda_1 = \min \{ \lambda_{\min}(P_{ij}), i,j=1,2 \}$ . 因此同步误差系统(11)关于  $S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22})$  是一致指数稳定的.

接下来证明, 当初始值  $e(0) = 0$  时, 控制输出  $y_e(t)$  满足不等式(7). 为此, 引入辅助函数:

$$J(t) = \int_0^t \varphi(s) (\| y_e(s) \|^2 - \mu_0 \gamma^2 \| w(s) \|^2) ds,$$

$t \geq 0$ .

对任意的  $s \geq 0$ , 存在  $k \in \mathbb{N}$ , 使得  $s \in \Delta_{1,k-1}$  或者  $s \in \Delta_{2,k-1}$ . 不失一般性, 假设  $s \in \Delta_{1,k-1}$ . 根据不等式(15)和  $V(t_{10}) = 0$ , 得到

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{V}(s) ds = & \sum_{l=0}^{k-1} \left( \int_{t_{1l}}^{t_{2l}} + \int_{t_{2l}}^{t_{1,l+1}} \dot{V}(s) ds \right) + \\ & \int_{t_{1k}}^t \dot{V}(s) ds = \sum_{l=0}^{k-1} (V(t_{2l}) - V(t_{1l}) + V(t_{1,l+1}) - \\ & V(t_{2l})) + V(t) - V(t_{1k}) \geq \sum_{l=0}^{k-1} (V(t_{2l}) - V(t_{2l})) + \\ & \sum_{l=1}^k (V(t_{1,l+1}) - V(t_{1l})) \geq 0. \end{aligned}$$

那么, 如下不等式成立:

$$\begin{aligned} J(t) = & \int_0^t \varphi(s) (\| y_e(s) \|^2 - \mu_0 \gamma^2 \| w(s) \|^2) + \\ & \dot{V}(s) ds - \int_0^t \dot{V}(s) ds \leq \int_0^t \varphi(s) (\| y_e(s) \|^2 - \\ & \mu_0 \gamma^2 \| w(s) \|^2 + \dot{V}(s)) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

对任意的  $s \in [t_{i,k-1}, t_{3-i,k+i-2})$ ,  $(i,k) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ , 沿系统(5)的轨线可得

$$\begin{aligned} \varphi(s) (\| y_e(s) \|^2 - \mu_0 \gamma^2 \| w(s) \|^2 + \dot{V}(s)) = \\ \varphi(s) \sum_{j=1}^2 \rho_j(s) \{ e^T(s) [\rho_0(t) \ln \mu_i P_{ij} + \rho_0(t) (P_{i1} - \\ P_{i2}) + P_{ij} A_{0i} + A_{0i} P_{ij}] e(s) + 2 e^T(s) P_{ij} A_{1j} \hat{f}(e(s)) - \\ 2 e^T(s) P_{ij} D_{1j} w(s) + y_e^T(s) y_e(s) - \mu_0 \gamma^2 w^T(s) w(s) \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) (\| y_e(s) \|^2 - \mu_0 \gamma^2 \| w(s) \|^2 + \dot{V}(s)) \leq \\ \varphi(s) \sum_{j,h=1}^2 \rho_j(s) \tilde{n}_h(s) \eta_2^T(s) (\Xi_{2ijh} + H^T H) \eta_2(s), \end{aligned}$$

其中  $s \eta_2(s) = \text{col}(\eta_1(s), w(s))$ ,  $H = [C \quad 0 \quad -D_2]$ ,

$$\Xi_{2ijh} = \begin{bmatrix} \Omega_{ijh} & P_{ij} A_{1j} + \Lambda_{ij} L_2 & -P_{ij} D_{1j} \\ * & -\Lambda_{ijh} & 0 \\ * & * & -\mu_0 \gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

根据不等式(9), 应用 Schur 补引理可以得到

$$\Xi_{2ijh} + H^T H < 0.$$

因此

$$\varphi(s) (\| y_e(s) \|^2 - \mu_0 \gamma^2 \| w(s) \|^2 + \dot{V}(s)) < 0.$$

把上式代入(16)式, 推出  $J(t) \leq 0, \forall t \geq 0$ , 即

$$\int_0^t \varphi(s) \| y_e(s) \|^2 ds \leq \int_0^t \mu_0 \gamma^2 \varphi(s) \| w(s) \|^2 ds, \forall t \geq 0.$$

由于  $\min \{ \mu_1, \mu_2, 1 \} \leq \varphi(s) \leq \max \{ \mu_1, \mu_2, 1 \}$ , 就意味着不等式(5)成立. 证毕.

假设间歇切换时间序列  $S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22})$  满足  $\delta_{11} = \delta_{12}, \delta_{21} = \delta_{22}$ , 则非周期间歇控制就成为周期间歇控制, 那么根据定理 1 可得如下推论.

**推论 1** 给定控制增益矩阵  $K \in R^{m \times n_c}$ , 控制周期  $\omega$  和控制宽度  $\delta$ , 考虑同步误差系统(5)满足(6)式. 对于给定正标量  $\mu_1, \mu_2, \gamma$ , 若存在  $n \times n$  正定矩阵  $P_{ij}, i, j=1, 2$  和正定对角矩阵  $\Lambda_{ij}, i, j=1, 2$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} \Omega_{ij} & P_{ij}A_1 + \Lambda_{ij}L_2 & -P_{ij}D_1 & C^T \\ * & -\Lambda_{ij} & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_0\gamma^2 I & -D_2^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad 0, i, j=1, 2,$$

$$P_{i2} \leq \mu_{3-i} P_{3-i,1}, i=1, 2,$$

其中  $\Omega_{ij} = \frac{\ln \mu_i}{\delta_i} P_{ij} + \frac{1}{\delta_i} (P_{i1} - P_{i2}) + P_{ij}A_{0i} + A_{0i}^T P_{ij} +$

$$\Lambda_{ij}L_1, \mu_0 = \frac{\min\{\mu_1, \mu_2, 1\}}{\max\{\mu_1, \mu_2, 1\}}, A_{01} = A_0 + BK, A_{02} = A_0,$$

$$\delta_1 = \delta, \delta_2 = \omega - \delta,$$

则系统(5)全局指数稳定且  $L_2$ -增益小于  $\gamma$ .

**注 1** 文献[11-16]研究了系统的周期间歇同步问题. 然而在实际中, 周期间歇控制是不合理或者没必要的. 与之前文献不同, 本文所提出的间歇控制的控制窗口宽度和休息宽度是可变的. 另外, 定理 1 提出了新颖的时变切换 Lyapunov 函数来研究系统的  $H_\infty$  同步问题. 时变切换 Lyapunov 函数能够使系统在开环模式上具有有限  $L_2$ -增益. 传统的时不变 Lyapunov 函数在分析  $L_2$ -增益时, 即使  $\gamma$  充分大, 也不能满足不等式:

$$\|y_c(s)\|^2 - \gamma^2 \|\omega(s)\|^2 + \dot{V}(s) \leq 0.$$

说明本文提出的时变 Lyapunov 函数更具优越性.

### 3 控制器设计

在定理 1 的基础上解决间歇  $H_\infty$  同步控制器的设计问题. 给出如下假设:

(H2) 假设(H1)成立, 且  $\underline{\kappa}_i, \bar{\kappa}_i, i=1, 2, \dots, n$  满足如下条件:

$$\underline{\kappa}_i \leq 0 \leq \bar{\kappa}_i.$$

**定理 2** 给定间歇切换时间序列  $S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22})$ , 考虑驱动系统(1)满足假设(H1), 间歇受控响应系统(3)和间歇控制律(4). 对于给定正标量  $\mu_i, \epsilon_i, \theta_i, \gamma, i=1, 2$ , 若存在  $n \times n$  正定矩阵  $X_{ij}, i, j=1, 2$ , 正定对角矩阵  $\bar{\Lambda}_{ijh}, i, j, h=1, 2$  和  $n \times n$  可逆矩阵  $X_0, m \times n_c$  矩阵  $\bar{K}$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$X_{3-i,1} \leq \mu_{3-i} X_{i2}, i=1, 2, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11h} & I_0^T (X_{11} - X_0^T + \theta_1 B \bar{K}) \\ * & -\theta_1 (X_0 + X_0^T) \end{bmatrix} < 0, h=1, 2, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{12h} & X_{12} & I_0^T (X_{12} - X_0^T + \theta_2 B \bar{K}) \\ * & -\delta_{1h} X_{11} & 0 \\ * & * & -\theta_2 (X_0 + X_0^T) \end{bmatrix} < 0, \quad h=1, 2, \quad (19)$$

$$\Gamma_{21h} < 0, h=1, 2, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{22h} & X_{22} \\ * & -\delta_{2h} X_{21} \end{bmatrix} < 0, h=1, 2, \quad (21)$$

其中,  $I_0^T = [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $\bar{L}_1 = L_1^{1/2}$

$$\Gamma_{ijh} =$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ijh} & A_1 \bar{\Lambda}_{ijh} + X_{ij}L_2 & -D_1 & X_{ij}C^T & X_{ij}\bar{L}_1^T \\ * & -\bar{\Lambda}_{ijh} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_0\gamma^2 I & -D_2^T & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\Lambda}_{ijh} \end{bmatrix},$$

$i, j, h=1, 2,$

$$\Psi_{11h} = \frac{\ln \mu_1 + 1 - 2\epsilon_1}{\delta_{1h}} X_{11} + \frac{\epsilon_1^2}{\delta_{1h}} X_{12} + A_0 X_{11} +$$

$$X_{11}A_0^T + B\bar{K} + \bar{K}^T B^T, \Psi_{12h} = \frac{\ln \mu_1 - 1}{\delta_{1h}} X_{12} + A_0 X_{12} +$$

$$X_{12}A_0^T + B\bar{K} + \bar{K}^T B^T, \Psi_{21h} = \frac{\ln \mu_2 + 1 - 2\epsilon_2}{\delta_{2h}} X_{21} +$$

$$\frac{\epsilon_2^2}{\delta_{2h}} X_{22} + A_0 X_{21} + X_{21}A_0^T, \Psi_{22h} = \frac{\ln \mu_2}{\delta_{2h}} X_{22} +$$

$$A_0 X_{22} + X_{22}A_0^T.$$

则  $K = \bar{K} X_0^{-1}$ , 那么驱动系统(1)和响应系统(3)关于  $S_\sigma(\delta_{11}, \delta_{12}; \delta_{21}, \delta_{22})$  一致指数稳定且  $L_2$ -增益小于  $\gamma$ .

**证明** 令  $X_{ij} = P_{ij}^{-1}, K = \bar{K} X_0^{-1}, \bar{\Lambda}_{ijh} = \bar{\Lambda}_{ijh}^{-1}, i, j, h=1, 2$ . 容易验证线性不等式(17)与(10)等价. 由引理 1 可得如下线性矩阵不等式成立:

$$-X_{11} X_{12}^{-1} X_{11} \leq -2\epsilon_1 X_{11} + \epsilon_1^2 X_{12}.$$

利用 Schur 补引理以及上式不等式, 由线性矩阵不等式(18)和(19)可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{1jh} - B_1 X_0 A - (B_1 X_0 A)^T & A^T (X_{1j} - X_0^T) + B_1 (\theta_j X_0) \\ * & -\theta_j (X_0 + X_0^T) \end{bmatrix} < 0, \quad j=1, 2, \quad (22)$$

其中,  $A = [I \ 0 \ 0 \ 0], B_1 = \text{col}(BK, 0, 0, 0),$

$$\tilde{\Gamma}_{1jh} =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{1jh} & A_1 \bar{\Lambda}_{1jh} + X_{1j}L_2 & -D_1 & X_{1j}C^T \\ * & -\bar{\Lambda}_{1jh} & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_0\gamma^2 I & -D_2^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Psi}_{1jh} = \frac{\ln \mu_1}{\delta_{1h}} X_{1j} + \frac{\ln \mu_1}{\delta_{1h}} X_{1j} (P_{11} - P_{12}) X_{1j} + A_0 X_{1j} +$$

$$X_{1j}A_0^T + X_{1j}\Lambda_{1jh}L_1X_{1j}.$$

根据引理 2, 由矩阵不等式(22)可以得到

$$\tilde{\Gamma}_{1jh} - B_1X_{1j}A - (B_1X_{1j}A)^T < 0, j=1, 2. \quad (23)$$

在不等式两边同时乘以  $\text{diag}\{P_{ij}, \Lambda_{1jh}, I, I\}$ , 那么线性矩阵不等式(18), (19)等价于当  $i=1, j, h=1, 2$  时的线性矩阵不等式(9). 利用相同的分析技巧可得线性矩阵不等式(20), (21)等价于  $i=2, j, h=1, 2$  时的线性矩阵不等式(9). 再根据定理 1 可得结论成立.

**推论 2** 对控制周期  $\omega$  和控制宽度  $\delta$ , 考虑驱动系统(1)满足假设(H1), 间歇受控响应系统(3)和间歇控制律(4). 对于给定正标量  $\mu_i, \epsilon_i, \theta_i, \gamma, i=1, 2$ . 若存在  $n \times n$  正定矩阵  $X_{ij}, i, j=1, 2$ , 正定对角矩阵  $\bar{\Lambda}_{ij}, i, j=1, 2$  和  $n \times n$  可逆矩阵  $X_0, m \times n_c$  矩阵  $\bar{K}$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{aligned} X_{3-i,1} &\leq \mu_{3-i} X_{i2}, i=1, 2, \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & I_0^T(X_{11} - X_0^T + \theta_1 B \bar{K}) \\ * & -\theta_1(X_0 + X_0^T) \end{bmatrix} &< 0, \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{12} & X_{12} & I_0^T(X_{12} - X_0^T + \theta_2 B \bar{K}) \\ * & -\delta X_{11} & 0 \\ * & * & -\theta_2(X_0 + X_0^T) \end{bmatrix} &< 0, \\ \Gamma_{21} &< 0, \\ \begin{bmatrix} \Gamma_{22} & X_{22} \\ * & -(\omega - \delta)X_{21} \end{bmatrix} &< 0, \end{aligned}$$

其中  $I_0 = [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $\bar{L}_1 = L_1^{1/2}$ ,

$$\Gamma_{ij} =$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ij} & A_1 \bar{\Lambda}_{ij} + X_{ij} L_2 & -D_1 & X_{ij} C^T & X_{ij} \bar{L}_1^T \\ * & -\bar{\Lambda}_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mu_0 \gamma^2 I & -D_2^T & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\Lambda}_{ij} \end{bmatrix}, i,$$

$j=1, 2,$

$$\Psi_{11} = \frac{\ln \mu_1 + 1 - 2\epsilon_1}{\delta} X_{11} + \frac{\epsilon_1^2}{\delta} X_{12} + A_0 X_{11} + X_{11} A_0^T +$$

$$B \bar{K} + \bar{K}^T B^T, \Psi_{12} = \frac{\ln \mu_1 - 1}{\delta} X_{12} + A_0 X_{12} + X_{12} A_0^T +$$

$$B \bar{K} + \bar{K}^T B^T, \Psi_{21} = \frac{\ln \mu_2 + 1 - 2\epsilon_2}{\omega - \delta} X_{21} + \frac{\epsilon_2^2}{\omega - \delta} X_{22} +$$

$$A_0 X_{21} + X_{21} A_0^T,$$

$$\Psi_{22} = \frac{\ln \mu_2}{\omega - \delta} X_{22} + A_0 X_{22} + X_{22} A_0^T.$$

则  $K = \bar{K} X_0^{-1}$ , 驱动系统(1)和响应系统(3)完全同步且  $L_2$ -增益小于  $\gamma$ .

**注 2** 定理 2 给出间歇  $H_\infty$  同步控制器的充分条件. 而从实际出发, 需尽可能使得间歇  $H_\infty$  同步控制器具有较小的增益. 根据定理 2, 提出如下凸优化问题来限制增益矩阵  $K$  的范数.

$$(OP) \quad \text{minimize } v$$

$$\text{Subject to } \begin{bmatrix} -X_0 & \bar{K}^T \\ * & -\gamma \psi^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$X_0 \geq \eta I$ , 线性矩阵不等式(17)-(21).

## 4 数值仿真

考虑 Chua's 电路系统, 参数如下:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -ab & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}, A_1 =$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha(a-b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0],$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|),$$

其中,  $\alpha = 9.2156, \beta = 15.9946, a = -1.2495, b = 0.75735$ . 响应系统(3)具有相同的参数, 并且  $D_1 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T, D_2 = 0.1$ . 容易验证假设(H1)和(H2)成立, 且  $L_1 = L_1^{1/2} = 0$ . 图 1 展示了驱动系统的混沌现象.

对于给定的  $\delta_{11} = 0.45, \delta_{12} = 0.60, \delta_{21} = 0.15, \delta_{22} = 0.25$ , 给定的  $L_2$ -增益  $\gamma = 1$ , 求解优化问题(OP). 选择参数

$$(\mu_1, \mu_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \theta_1, \theta_2) = (1.45, 0.29, 0.83, 0.78, 0.027, 0.032),$$

可得  $v_{\min} = 79.50$ . 相应的间歇增益矩阵为

$$K = [-21.6440 \ -39.2940 \ -6.6.31].$$

在  $\delta_{i1} \leq t_{3-i, k+i-2} - t_{i, k-1} \leq \delta_{i2}, k \in \mathbb{N}, i=1, 2$  的限制下, 图 2 为随机产生的间歇切换信号  $\sigma(t)$ . 数值仿真中选取初始值  $x_0 = (0.9, 0.3, 1)^T$  和  $\hat{x}_0 = (-4, 5, 7)^T$  以及外部干扰  $w(t) = \frac{\sin t}{(t+1)^2}$ . 图 3 展示了相应的间歇

歇  $H_\infty$  控制器  $K$  下, 误差系统的状态演化曲线, 图 4 给出相应的误差系统状态范数的演化曲线. 从仿真结果(图 1~4)可看出本文所提方法是有效的.

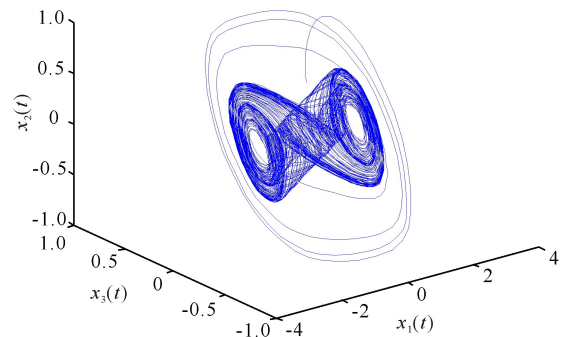


图 1 Chua's 电路的混沌现象

Fig. 1 Chaotic phenomenon of Chua's circuit system

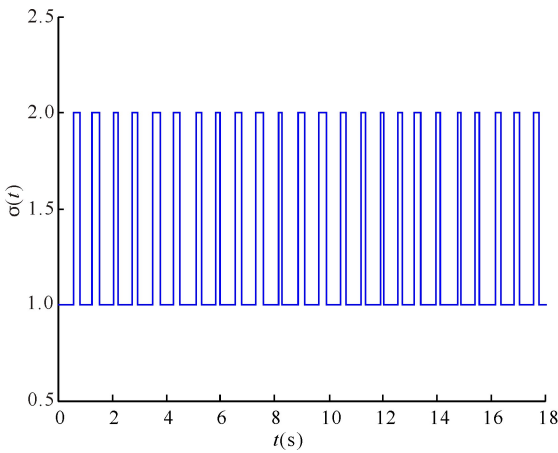


图2 间歇切换信号

Fig. 2 The intermittent switching signal

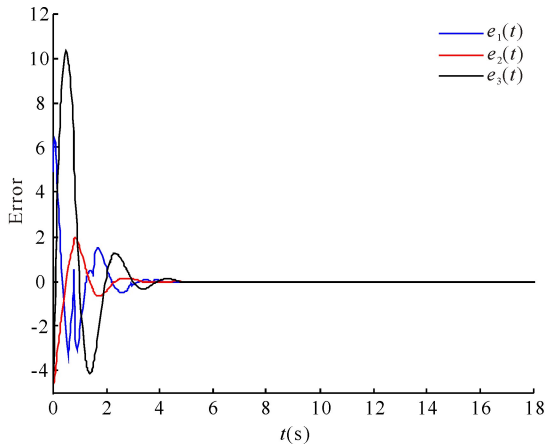


图3 间歇控制下误差系统状态轨线

Fig. 3 The state trajectories of error system with the intermittent control

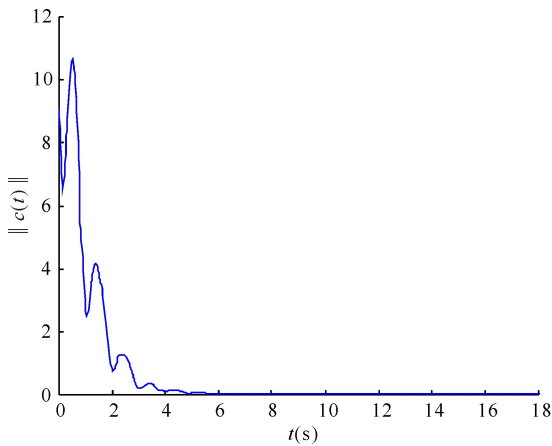


图4 间歇控制下误差系统状态范数演化曲线

Fig. 4 The state norm evolution curve of error system with the intermittent control

## 5 结论

本文主要研究一类非线性系统的非周期间歇  $H_\infty$  同步问题。通过构造切换时变的 Lyapunov 函数分析系统的内指数稳定性和  $L_2$ -增益性能。与以往

的 Lyapunov 函数相比,本文所提出的 Lyapunov 函数能够使其在开环模式上单调递减。另外,基于线性矩阵不等式,给出非周期间歇控制器的设计方案,还用数值算例验证所提结果的有效性。

### 参考文献:

- [1] LIU F, REN Y, SHAN X M, et al. A linear feedback synchronization theorem for a class of chaotic systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2002, 13(4): 723-730.
- [2] HUANG L L, FENG R P, WANG M. Synchronization of chaotic systems via nonlinear control [J]. Physics Letters A, 2004, 320(4): 271-275.
- [3] 沈艳军, 胡俊波. 一类非线性系统连续非光滑自适应观测器设计 [J]. 广西科学, 2015, 22(4): 421-424.
- [4] SHEN Y J, HU J B. Continuous but nonsmooth adaptive observer design for a class of nonlinear systems [J]. Guangxi Sciences, 2015, 22(4): 421-424.
- [5] TAN X H, ZHANG J Y, YANG Y R. Synchronizing chaotic systems using backstepping design [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 16(1): 37-45.
- [6] YAU H T. Design of adaptive sliding mode controller for chaos synchronization with uncertainties [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22(2): 341-347.
- [7] CHEN W H, LU X M, ZHENG W X. Impulsive stabilization and impulsive synchronization of discrete-time delayed neural networks [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(4): 734-748.
- [8] CHEN W H, LUO S X, ZHENG W X. Impulsive synchronization of reaction-diffusion neural networks with mixed delays and its application to image encryption [J]. IEEE Transaction on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 31(1): 1-15.
- [9] LI X D, RAKKIYAPPAN R. Impulsive controller design for exponential synchronization of chaotic neural networks with mixed delays [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(6): 1515-1523.
- [10] MATHIYALAGAN K, PARK J H, SAKTHIVEL R. Synchronization for delayed memristive BAM neural networks using impulsive control with random nonlinearities [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 259: 967-979.
- [11] CHEN W H, JIANG Z Y, ZHONG J C, et al. On designing decentralized impulsive controllers for synchronization of complex dynamical networks with nonidentical nodes and coupling delays [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(8): 4084-4110.
- [12] YU J, HU C, JIANG H J, et al. Synchronization of nonlinear systems with delays via periodically nonlinear

- intermittent control[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(7): 2978-2989.
- [12] LI N, CAO J D. Periodically intermittent control on robust exponential synchronization for switched interval coupled networks[J]. *Neurocomputing*, 2014, 131: 52-58.
- [13] ZHANG G D, SHEN Y. Exponential synchronization of delayed memristor-based chaotic neural networks via periodically intermittent control[J]. *Neural Networks*, 2014, 55: 1-10.
- [14] GAN Q T. Exponential synchronization of stochastic Cohen-Grossberg neural networks with mixed time-varying delays and reaction-diffusion via periodically intermittent control[J]. *Neural Networks*, 2012, 31: 12-21.
- [15] CHEN W H, ZHONG J C, JIANG Z Y, et al. Periodically intermittent stabilization of delayed neural networks based on piecewise Lyapunov functions/functionals[J]. *Circuits, Systems, and Signal processing*, 2014, 33(12): 3757-3782.
- [16] 蒋燕, 刘琼. 线性时滞中立型系统的周期间歇镇定[J]. *广西科学*, 2015, 22(4): 438-444.  
JIANG Y, LIU Q. Periodically intermittent stabilization of linear neutral-type systems with delay[J]. *Guangxi Sciences*, 2015, 22(4): 438-444.
- [17] 陈武华, 钟佳成, 蒋志勇. 一类非线性系统的周期间歇镇定[J]. *广西大学学报: 自然科学版*, 2014, 39(2): 378-386.  
CHEN W H, ZHONG J C, JIANG Z Y. Stabilization of a class of nonlinear systems by using periodic intermittent control[J]. *Journal of Guangxi University: Natural Science Edition*, 2014, 39(2): 378-386.
- [18] YANG X S, CAO J D. Stochastic synchronization of coupled neural networks with intermittent control[J]. *Physics Letters A*, 2009, 373(36): 3259-3272.
- [19] 黄敢基, 罗世贤, 钟佳成. 线性系统的间歇观测器设计[J]. *广西科学*, 2015, 22(4): 425-429, 437.  
HUNG G J, LUO S X, ZHONG J C. Intermittent observer design for linear systems[J]. *Guangxi Sciences*, 2015, 22(4): 425-429, 437.
- [20] LIU X W, CHEN T P. Synchronization of nonlinear coupled networks via aperiodically intermittent pinning control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(1): 113-126.
- [21] SONG Q K, HUANG T W. Stabilization and synchronization of chaotic systems with mixed time-varying delays via intermittent control with non-fixed both control period and control width[J]. *Neurocomputing*, 2015, 154: 61-69.
- [22] KARIMI H R, GAO H J. New delay-dependent exponential  $H_\infty$  synchronization for uncertain neural networks with mixed time delays[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2010, 40(1): 173-185.
- [23] KARIMI H R. A sliding mode approach to  $H_\infty$  synchronization of master-slave time-delay systems with Markovian jumping parameters and nonlinear uncertainties[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(4): 1480-1496.
- [24] CHEN W H, JIANG Z Y, LU X M, et al.  $H_\infty$  synchronization for complex dynamical networks with coupling delays using distributed impulsive control[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2015, 17: 111-127.

(责任编辑: 尹 闯)