网络优先数字出版时间:2016-11-21 【DOI】10.13656/j.cnki.gxkx.20161121.011
网络优先数字出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/45.1206.G3.20161121.1546.022.html

线性比式和分式规划问题的分支定界算法*

A Branch and Bound Algorithm for the Sum of Linear Ratios Problem

申培萍,李丹华
SHEN Peiping,LI Danhua

(河南师范大学数学与信息科学学院,河南新乡 453007)
(College of Mathematics and Information Science,Henan Normal University,Xinxiang,Henan,453007,China)

摘要:针对线性比式和问题(P)提出一种新的分支定界算法,并进行数值验证.该算法把问题转换成等价问题,并利用线性松弛技术建立问题的松弛线性规划,从而将原始的非凸规划问题归结为一系列线性规划问题,通过可行域的连续细分以及求解一系列线性松弛规划,得出的算法收敛到问题(P)的全局最优解.数值算例结果表明算法是可行有效的.

关键词:线性比式和 全局优化 线性松弛 分支定界 ω 分法
中图分类号:O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2016)05-0392-04

Abstract:In this paper,we presents a new branch and bound algorithm for globally solving the sum of linear ratios problem,which is verified by the numerical examples. The algorithm transform the problem to its equivalent problem,and establish a relaxational linear programming problem of by using a linear relaxation technique,thus the initial nonconvex programming problem is reduced to a sequence of linear programming problems. The proposed algorithm is convergent to the global minimum of (P) through the successive refinement of the feasible region and solutions of a series of relaxation linear programming,and finally numerical examples are given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm.

Key words:sum of linear ratios,global optimization,linear relaxation,branch and bound,ω division

0 引言

【研究意义】线性比式和优化问题在运输计划,政府规划及经济投资等领域有着重要的作用[1].考虑如下线性比式和问题:

$$(P):\begin{cases}\min\ f(x)=\sum_{i=1}^{p}\dfrac{c_i^\top x+\alpha_i}{d_i^\top x+\gamma_i}\\ \text{s.t.}\quad Ax\leqslant b,\\ \qquad x\in X^0=\{x\in R_+^n:l^0\leqslant x\leqslant u^0\},\end{cases}$$

其中 $A\in R^{m\times n}$,$b\in R^m$,$c_i,d_i\in R^n$,$\alpha_i,\gamma_i\in R$,$d_i^\top x+\gamma_i>0$,且 $\gamma_i\neq 0$,$i=1,2,\cdots,p$,可行域 $D=\{x\in X^0\mid Ax\leqslant b\}$ 非空.问题(P)的目标函数既非拟凸也非拟凹,在理论和计算方面具有很大的挑战性,因此对问题(P)的求解方法的研究既有理论意义又有实用价值.【前人研究进展】近年来问题(P)已引起许多研究者的关注[1-5],目前人们针对线性比式和问题的研究大多都要求目标函数的分子分母在可行域内非负.

收稿日期:2016-08-15
作者简介:申培萍(1964-),女,博士,教授,主要从事最优化理论与应用研究。
*国家自然科学基金项目(11171094)资助。

【本研究切入点】本文考虑的问题模型仅要求 $d_i^\top x+\gamma_i>0$，且 $\gamma_i\neq 0$.【拟解决的关键问题】采用新的分支定界技术，从理论上证明了算法的收敛性，且用数值算例验证算法是可行的.

1 预备知识

为了求解问题(P)，引入 p 个向量 $y_i=\dfrac{x}{d_i^\top x+\gamma_i}$，$i=1,2,\cdots,p$. 根据 Sherman-Morrison 定理可得，$x=\dfrac{\gamma_i y_i}{1-d_i^\top y_i}$，$i=1,2,\cdots,p$. 于是，问题($P$)可转化为如下等价问题：

$$(\tilde{P}):\begin{cases}\min & \sum_{i=1}^{p}(c_i-\dfrac{\alpha_i d_i}{\gamma_i})^\top y_i+\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}\\ \text{s. t.} & Ax\leqslant b,\\ & y_i=\dfrac{x}{d_i^\top x+\gamma_i},i=1,2,\cdots,p,\\ & x\in X^0=[l^0,u^0].\end{cases}$$

命题 1 若(x^*,y^*)是$(\tilde{P})$的最优解，则 x^* 是(P)的最优解，反之，若 x^* 是(P)的最优解，则(x^*,y^*)是问题$(\tilde{P})$的最优解，其中，$y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_p^*)$，$y_i^*=\dfrac{x^*}{d_i^\top x^*+\gamma_i}$，$i=1,2,\cdots,p$. 且问题($P$)和$(\tilde{P})$的最优值相等.

由问题(P)和问题$(\tilde{P})$的定义易得命题 1 成立.

令 $X=[l,u]$ 表示初始盒子 X^0，或者由算法产生的 X^0 的子盒子. 下面考虑如何在子盒子 X 上求解问题$(\tilde{P})$，为此，需要构造 $\tilde{P}(X)$ 的线性松弛规划问题，其最优值能作为 $\tilde{P}(X)$ 的最优值的一个下界. 为了方便，令 $\xi_i=c_i-\dfrac{\alpha_i d_i}{\gamma_i}$，$\tau_i=\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}$，$i\in I=\{1,2,\cdots,p\}$，去掉问题 $\tilde{P}(X)$ 中 p 个等式约束，可得其松弛问题：

$$Q(X):\begin{cases}\min & g(y)=\sum_{i=1}^{p}\xi_i^\top y_i+\tau_i\\ \text{s. t.} & (A+\dfrac{bd_i^\top}{\gamma_i})y_i\leqslant\dfrac{b}{\gamma_i},i\in I,\\ & -(\dfrac{ld_i^\top}{\gamma_i}+I)y_i\leqslant-\dfrac{l}{\gamma_i},i\in I,\\ & (\dfrac{ud_i^\top}{\gamma_i}+I)y_i\leqslant\dfrac{u}{\gamma_i},i\in I,\\ & \dfrac{l}{s_i}\leqslant y_i\leqslant\dfrac{u}{t_i},i\in I,\end{cases}$$

其中，$s_i=\sum_{j=1,d_{ij}>0}^{n}d_{ij}u_j+\sum_{j=1,d_{ij}<0}^{n}d_{ij}l_j+\gamma_i$，$t_i=\sum_{j=1,d_{ij}>0}^{n}d_{ij}l_j+\sum_{j=1,d_{ij}<0}^{n}d_{ij}u_j+\gamma_i$.

命题 2 (i) 若 x^* 是问题 $P(X)$ 的最优解，则问题 $Q(X)$ 有最优解 $\tilde{y}$，且 $\sum_{i=1}^{p}\xi_i^\top\tilde{y}_i+\tau_i\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dfrac{c_i^\top x^*+\alpha_i}{d_i^\top x^*+\gamma_i}$. (ii) 若 $\tilde{x}_1=\cdots=\tilde{x}_i=\cdots=\tilde{x}_p$，其中，$\tilde{x}_i=\dfrac{\gamma_i\tilde{y}_i}{1-d_i^\top\tilde{y}_i}$，$i=1,2,\cdots,p$，则每个 $\tilde{x}_i$ 均是问题 $P(X)$ 的最优解.

证明 (i) 令 $y_i^*=\dfrac{x^*}{d_i^\top x^*+\gamma_i}$，$i\in I$，显然，$y^*$ 是问题 $Q(X)$ 的可行解. 设 $\tilde{y}$ 是线性规划问题 $Q(X)$ 的最优解，则 $g(\tilde{y})\leqslant g(y^*)=\sum_{i=1}^{p}\dfrac{c_i^\top x^*+\alpha_i}{d_i^\top x^*+\gamma_i}$，即(i)成立.

(ii) 显然每个 $\tilde{x}_i$ 均是问题 $P(X)$ 的可行解，所以由(i)，$g(\tilde{y})=\sum_{i=1}^{p}\dfrac{c_i^\top\tilde{x}_i+\alpha_i}{d_i^\top\tilde{x}_i+\gamma_i}\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dfrac{c_i^\top x^*+\alpha_i}{d_i^\top x^*+\gamma_i}$，则当 $\tilde{x}_1=\tilde{x}_2\cdots=\tilde{x}_p$ 时，每个 $\tilde{x}_i$ 均是问题 $P(X)$ 的最优解.

由上述命题可知，若求得问题 $Q(X)$ 的最优值 $g(\tilde{y})$，则其可作为问题 $P(X)$ 的最优值的一个下界.

2 算法及其收敛性

采用分支定界方法求解问题 $\tilde{P}(X)$，并利用问题 $Q(X)$ 进行定界，而分支过程采用如下 ω 分割[6]. 设 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_p)$ 是问题 $Q(X)$ 的最优解，则 $x_i=\dfrac{\gamma_i y_i}{1-d_i^\top y_i}(i=1,2,\cdots,p)$，重心 $\omega=\dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i$ 是问题 $P(X)$ 的可行解. 由命题 2，若 $x_1=\cdots=x_p$，则每个 x_i 是 $P(X)$ 的最优解，否则，可用点 ω 分割盒子 $X=[l,u]$，具体过程如下：

令 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$\rho_j=\min\{u_j-\omega_j,\omega_j-l_j\}$，$j\in N$，$q\in\arg\max\{\rho_j\mid j\in N\}$.

这样 X 就被分割成两个子盒子 $X_1=[l',u]$ 和 $X_2=[l,u']$，其中，

$l'=(l_1,\cdots,l_{q-1},\omega_q,l_{q+1},\cdots,l_n)$，

$u'=(u_1,\cdots,u_{q-1},\omega_q,u_{q+1},\cdots,u_n)$.

令 $X^1=X^0$，用上述分割方法将盒子 X^1 分割成 X_1^1 和 X_2^1，在这两个子盒子上分别求解问题 $Q(X_r^1)$，$r=1,2$，其较小最优值所对应的盒子定义为 X^2，再对此盒子进行分割. 该过程依次进行下去就会得到一系列子盒子 X_r^k，$k=1,2,\cdots$，$r=1,2$.

通过求解问题 $Q(X_r^k)$，可逐步改进原问题(P)的最优值的上下界，最终确定(P)的全局最优解. 假定在算法的第 k 次迭代，E_k 表示由活动节点(可能存在全局最优解的盒子)构成的集合. 对每个节点 $\hat{X}\in E_k$，求得问题 $Q(\hat{X})$ 的最优解，能得到问题(P)的对应的若干可行解，再更新(P)的最优值的上界 UB_k.

由于问题 $Q(\hat{X})$ 的最优值 $LB(\hat{X})$ 为原问题(P) 最优值的下界. 若 $LB(\hat{X}) > UB_k$, 将节点 $\hat{X}$ 从 E_k 中删除. 选定一个合适的活动节点, 将其分成两部分, 在每个新的节点上求解问题, 重复这一过程直到满足收敛条件为止. 具体算法步骤如下:

步骤 1　给定参数 $\epsilon \geqslant 0$, 迭代次数 $k=1$, 活动节点 $E_k = \{X^k\}$, 上界 $UB_k = \infty$.

求解问题 $Q(X^k)$ 得最优解和最优值分别为 y^k 和 $LB(X^k) = g(y^k)$. 令

$$x_i^k = \frac{\gamma_i y_i^k}{1 - d_i^\top y_i^k}, i = 1, 2, \cdots, p.$$

若 $x_1^k = \cdots = x_p^k$, 算法终止, $x_i^k, f(x_i^k)(\forall i \in I)$ 分别是原问题(P) 的最优解和最优值, 否则, 执行步骤 2.

步骤 2　令 $\omega^k = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i^k$, $UB_k = \min\{UB_k, f(x_1^k), \cdots, f(x_p^k), f(\omega^k)\}$, $LB_k = LB(X^k)$, 选定 x^k 使得 $UB_k = f(x^k)$. 若 $UB_k - LB_k \leqslant \epsilon$, 算法终止, x^k 与 UB_k 分别为原问题(P) 的最优解和最优值, 否则, 执行步骤 3.

步骤 3　用 ω 分法将盒子 X^k 分成两部分 X_1^k 和 X_2^k, 令 $E_k = E_k \backslash \{X^k\}$.

步骤 4　对于任意 $r \in \{1, 2\}$, 若 $X_r^k \neq \emptyset$, 求得问题 $Q(X_r^k)$ 的最优解 y_r^k, 令 $LB(X_r^k) = g(y_r^k)$.

若 $LB(X_r^k) \leqslant UB_k$, 令 $E_k = E_k \cup X_r^k$, $x_{ri}^k = \frac{\gamma_i y_{ri}^k}{1 - d_i^\top y_{ri}^k}$, $i = 1, 2, \cdots, p$, $\omega_r^k = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_{ri}^k$, $UB_k = \min\{UB_k, f(x_{r1}^k), \cdots, f(x_{rp}^k), f(\omega_r^k)\}$. 选定 x^k 使得 $UB_k = f(x^k)$.

步骤 5　令 $E_{k+1} = E_k \cup \{\hat{X} \in E_k : UB_k - LB(\hat{X}) \leqslant \epsilon\}$. 若 $E_{k+1} = \emptyset$, 算法终止, x^k 与 UB_k 分别为问题(P) 的最优解和最优值. 否则, $k = k+1$, 令 $X^k = \arg\min_{\hat{X} \in E_k} LB(\hat{X})$, 返回步骤 3.

由上述算法可知, 在迭代过程中至少会产生一个嵌套的盒子序列, 不妨仍记为 $\{X^k\}$, 那么每个盒子的上下界及分割点 ω^k 所产生的序列 $\{l^k\}$, $\{\omega^k\}$, $\{u^k\}$ 满足如下条件:

$$l^k \leqslant l^{k+1} \leqslant \omega^{k+1} \leqslant u^{k+1} \leqslant u^k, k = 1, 2, \cdots. \quad (1)$$

其中 $[l^1, u^1] = [l^0, u^0]$, $\omega_{q^k}^k \in \{l_{q^k}^{k+1}, u_{q^k}^{k+1}\}$.

引理 1　(i) 序列 $\{l^k\}$, $\{u^k\}$ 满足: $\lim_{k \to +\infty} l^k = \bar{l}$, $\lim_{k \to +\infty} u^k = \bar{u}$, 且 $l^1 \leqslant \bar{l} \leqslant \bar{u} \leqslant u^1$. (ii) 序列 $\{\omega^k\}$ 的任意聚点 $\bar{\omega}$ 均是盒子 $[\bar{l}, \bar{u}]$ 的拐点. (iii) 设 $\{\omega^{k_s}\}$ 是收敛于 $\bar{\omega}$ 的一个子序列, 那么 $\lim_{s \to +\infty} x_i^{k_s} = \bar{\omega}$, $i \in I$.

证明　(i) 由(1) 式知, 对任意 $j \in N$, 序列 $\{l_j^k\}$, $\{u_j^k\}$ 单调有界, 所以 k 趋于无穷大时它们分别收敛于 $\bar{l}_j, \bar{u}_j$, 且满足 $l_j^1 \leqslant \bar{l}_j \leqslant \bar{u}_j \leqslant u_j^1$, 由 j 的任意性可证(i).

(ii) 序列 $\{\omega^k\} \in [l^1, u^1]$, 则该序列至少存在一个聚点 $\bar{\omega}$, 设 $\{\omega^{k_s}\}$ 是收敛于 $\bar{\omega}$ 的一个子列. 对于无穷大的 s, 存在 $t \in N$ 使得 $q^{k_s} = t$, 且 $\omega_t^{k_s} \in \{l_t^{k_s+1}, u_t^{k_s+1}\}$, 故

$$\omega_t^{k_s} \to \bar{\omega}_t \in \{\bar{l}_t, \bar{u}_t\}.$$

而由 ρ_j 及 q 的定义知,

$$\min\{u_t^{k_s} - \omega_t^{k_s}, \omega_t^{k_s} - l_t^{k_s}\} \geqslant \min\{u_j^{k_s} - \omega_j^{k_s}, \omega_j^{k_s} - l_j^{k_s}\}, j \in N.$$

显然, $s \to +\infty$ 时上述不等式左边趋于 0, 故右边也趋于 0, 即 $\bar{\omega}$ 是盒子 $[\bar{l}, \bar{u}]$ 的拐点. (iii) 由(ii) 知, $\bar{\omega}_j \in \{\bar{l}_j, \bar{u}_j\}$, $j \in N$. 而对任意的 $i \in I$, $x_{ij}^{k_s} \in [l_j^{k_s}, u_j^{k_s}]$, 有

$$\omega_j^{k_s} - l_j^{k_s} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(x_{ij}^{k_s} - l_j^{k_s}) \geqslant \frac{1}{p}(x_{ij}^{k_s} - l_j^{k_s}) \geqslant 0.$$

则 $\bar{\omega}_j = \bar{l}_j$ 时, $\lim_{s \to +\infty} x_{ij}^{k_s} = \lim_{s \to +\infty} l_j^{k_s} = \bar{\omega}_j$.

同理, $\bar{\omega}_j = \bar{u}_j$ 时, $\lim_{s \to +\infty} x_{ij}^{k_s} = \lim_{s \to +\infty} u_j^{k_s} = \bar{\omega}_j$. 所以, $\lim_{s \to +\infty} x_i^{k_s} = \bar{\omega}$, $i \in I$. 证毕.

定理 1　(i) 参数 $\epsilon = 0$, 则算法有限步终止于问题(P) 的最优解 x^k, 或者产生一个无穷序列 $\{x^k\}$, 其任一聚点都是问题(P) 的最优解. (ii) 若 $\epsilon > 0$, 则算法有限步终止, 并得到问题(P) 的一个近似解 x^k, 且满足

$$UB_k = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x^k + \alpha_i}{d_i^\top x^k + \gamma_i} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x + \alpha_i}{d_i^\top x + \gamma_i} + \epsilon,$$

$\forall x \in D$.

证明　(i) 若算法经过 k 次迭代终止, 结论显然成立; 否则, 由算法可知,

$$LB(X^k) < UB_k \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \omega^k + \alpha_i}{d_i^\top \omega^k + \gamma_i}. \quad (2)$$

因为序列 $\{UB_k\}$ 单调递减且有下界, 故存在极限 $\overline{UB}$, 且 $\{UB_k\}$ 的任意子列 $\{UB_{k_s}\}$ 收敛于 $\overline{UB}$. 令 $\bar{\omega}$ 是 $\{\omega^k\}$ 的任意聚点, $\{\omega^{k_s}\}$ 是 $\{\omega^k\}$ 的收敛于 $\bar{\omega}$ 的子列, 则由引理 1 中的(iii) 可知, $s \to +\infty$ 时,

$$LB(X^{k_s}) = g(y^{k_s}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x_i^{k_s} + \alpha_i}{d_i^\top x_i^{k_s} + \gamma_i} \to \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{\omega} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{\omega} + \gamma_i}.$$

又因为 $\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \omega^{k_s} + \alpha_i}{d_i^\top \omega^{k_s} + \gamma_i} \to \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{\omega} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{\omega} + \gamma_i}(s \to +\infty)$, 由(2) 式可知 $UB_{k_s} \to \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{\omega} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{\omega} + \gamma_i}(s \to +\infty)$, 则 $\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{\omega} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{\omega} + \gamma_i} = \overline{UB}$. 所以 $LB(X^{k_s})$, $\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \omega^{k_s} + \alpha_i}{d_i^\top \omega^{k_s} + \gamma_i}$ 收敛

到$\overline{UB}$.假设存在 $x' \in D$ 满足

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x' + \alpha_i}{d_i^\top x' + \gamma_i} < \overline{UB}. \tag{3}$$

对于任意 s,在第 k_s 次迭代可行解 x' 属于某个盒子 $\hat{X} \in E_{k_s}$,而由 X^{k_s} 的选取可知

$$LB(X^{k_s}) \leqslant LB(\hat{X}) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x' + \alpha_i}{d_i^\top x' + \gamma_i},$$

则有

$$\overline{UB} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x' + \alpha_i}{d_i^\top x' + \gamma_i}.$$

这与(3)式矛盾,故假设不成立.即有

$$\overline{UB} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x + \alpha_i}{d_i^\top x + \gamma_i}, \forall x \in D.$$

因为 D 是紧集,故序列$\{x^k\}$的任意聚点 $\bar{x} \in D$.设$\{x^{k_t}\}$是收敛于 $\bar{x}$ 的子列,则

$$\lim_{t\to+\infty} UB_{k_t} = \lim_{t\to+\infty} \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x^{k_t} + \alpha_i}{d_i^\top x^{k_t} + \gamma_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{x} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{x} + \gamma_i},$$

即

$$\overline{UB} = \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{x} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{x} + \gamma_i}.$$

那么对 $\forall x \in D$,有

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top \bar{x} + \alpha_i}{d_i^\top \bar{x} + \gamma_i} \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x + \alpha_i}{d_i^\top x + \gamma_i}.$$

所以,$\bar{x}$ 是(P)的最优解.

(ii) 由(i)可知,$\lim_{s\to+\infty} UB_{k_s} = \lim_{s\to+\infty} LB(X^{k_s})$,根据极限的定义知,一定存在 $\bar{s}$,不妨设 $k = k_{\bar{s}}$,满足

$$UB_k - LB(X^k) \leqslant \epsilon,$$

所以,对任意 $x \in D$,有

$$UB_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x + \alpha_i}{d_i^\top x + \gamma_i} \leqslant UB_k - LB(X^k) \leqslant \epsilon.$$

即有 $UB_k \leqslant \sum_{i=1}^{p} \frac{c_i^\top x + \alpha_i}{d_i^\top x + \gamma_i} + \epsilon, \forall x \in D$. 证毕.

3 数值实验

为验证算法的可行性,在 AMD A8 CPU(主频 1.9 GHz)4 GB 内存的微机上用 Matlab(2012b)进行数值计算.

例 1[2]

$$\begin{aligned} &\max \frac{a_1(x)}{b_1(x)} + \frac{a_2(x)}{b_2(x)} + \frac{a_3(x)}{b_3(x)} + \frac{a_4(x)}{b_4(x)} \\ &\text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 + 5x_3 \leqslant 10, \\ &\qquad x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leqslant 10, \\ &\qquad 5x_1 + 9x_2 + 2x_3 \leqslant 10, \\ &\qquad 9x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leqslant 10, \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

其中,$a_1(x) = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 50$,$a_2(x) = 3x_1 + 4x_2 + 50$,$a_3(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 50$,$a_4(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 50$,$b_1(x) = 3x_2 + 3x_3 + 50$,$b_2(x) = 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 50$,$b_3(x) = x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 50$,$b_4(x) = 5x_2 + 4x_3 + 50$.

取 $\epsilon = 1e-9$,得计算结果:运行时间 0.8120 s,最优值为 4.0907,最优解为(1.1111,0.0000,0.0000),迭代次数为 29.

例 2[1]

$$\begin{aligned} &\max \frac{a_1(x)}{b_1(x)} - \frac{a_2(x)}{b_2(x)} - \frac{a_3(x)}{b_3(x)} - \frac{a_4(x)}{b_4(x)} \\ &\text{s.t.} \quad 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 10, \\ &\qquad 10x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 10, \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

其中,$a_1(x) = 3x_1 + 4x_2 + 50$,$a_2(x) = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 50$,$a_3(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 50$,$a_4(x) = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 50$,$b_1(x) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 50$,$b_2(x) = 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 50$,$b_3(x) = 5x_2 + 4x_3 + 50$,$b_4(x) = 3x_2 + 3x_3 + 50$.

取 $\epsilon = 1e-6$,得计算:运行时间 0.8580 s,最优值为−1.9,最优解为(0.0000,3.3333,0.0000),迭代次数为 32.

数据结果表明,本文算法是可行的.

4 结论

本文提出一种新的分支定界算法求解线性比式和问题(P),先把问题(P)转换成等价问题 $\tilde{P}$,再利线性松弛技术建立$(\tilde{P})$的线性松弛规划,最后证明了算法的收剑性,并用数值算例验证其有效性.

参考文献:

[1] SHEN P P,WANG C F. Global optimization for sum of linear ratios problem with coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,176(1):219-229.

[2] JIAO H W,LIU S Y. A practicable branch and bound algorithm for sum of linear ratios problem[J]. European Journal of Operational Research,2015,243(3):723-730.

[3] CARLSSON J G,SHI J M. A linear relaxation algorithm for solving the sum-of-linear-ratios problem with lower dimension[J]. Operations Research Letters,2013,41(4):381-389.

[4] 张永红,汪春峰.求线性比式和问题全局解的一个新方法[J].应用数学学报,2012,35(1):42-48.
ZHANG Y H,WANG C F. A new global algorithm for sum of linear ratios problem[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2012,35(1):42-48.

[5] WANG C F,SHEN P P. A global optimization algorithm for linear fractional programming[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,204(1):281-287.

[6] KUNO T,MASAKI T. A practical but rigorous approach to sum-of-ratios optimization in geometric applications[J]. Computational Optimization and Applications,2013,54(1):93-109.

(责任编辑:尹 闯)