

# 求解线性逆问题的谱共轭梯度法\*

## A Spectral Conjugate Gradient Method for Solving Linear Inverse Problems

王华军,王 硕\*\*,曹义超

WANG Huajun, WANG Shuo, CAO Yichao

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004)

(School of Mathematics and Computational Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:**针对线性逆问题,把原问题的算子方程转化为带有 Tikhonov 正则项的无约束优化问题,提出一个求解线性逆问题的新谱共轭梯度法,并证明算法的全局收敛性.数值结果表明,新算法是有效的.

**关键词:**线性逆问题 谱共轭梯度法 Tikhonov 正则项

**中图分类号:**O224 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2016)05-0416-06

**Abstract:** In this study, a new spectral conjugate gradient method is presented to solve linear inverse problems, which are transferred into the linear unconstrained optimization with Tikhonov regularization. The global convergence of the proposed scheme is analyzed. The new algorithm is compared with Landweber, TSVD and TV methods, and numerical results illustrate the efficiency of this method.

**Key words:** linear inverse problems, spectral conjugate gradient method, Tikhonov regularization

### 0 引言

**【研究意义】**在理论研究和工程实践中,许多问题的解决需要根据观测数据来恢复或重构物理介质的结构信息,通常称这类问题为逆问题.逆问题分为线性逆问题 and 非线性逆问题,其中线性逆问题广泛出现在地球物理学、图像处理、地下水文学、全球海洋模拟、肿瘤检测、非破坏性检测等领域中<sup>[1]</sup>.**【前人研究**

**进展】**对于线性逆问题的研究,已有不少数值解法,文献[2]提出迭代 Tikhonov 正则化方法求解该问题,取得了较好的数值效果.文献[3]提出了 Levenberg-Marquardt 方法求解该问题,且在数值试验中,用偏差原则作为停止准则,但该方法所需 CPU 时间较长.文献[4]提出并讨论了一类 NCPs 逆问题.**【本研究切入点】**谱共轭梯度法是一类非常重要的优化方法,他是将谱梯度法和共轭梯度法的思想相结合的一种方法,具有迭代简单、易于编程以及存储要求低等优点,所以一般适用于求解大规模无约束优化问题.近年来,文献[5-7]用谱共轭梯度法求解线性 and 非线性优化问题,得到很好的数值效果.因此,本文希望把谱共轭梯度法应用到线性逆问题中.**【拟解决的关键问题】**针对线性逆问题,提出一个新的谱共轭梯度法,在理论上证明新提共轭梯度法的下降性和全局收敛性,并把该方法应用到卷积方程反演和图像处理的反演中.

收稿日期:2016-03-15

修回日期:2016-04-15

作者简介:王华军(1990-),男,硕士研究生,主要从事优化算法在反问题中的应用研究。

\* 国家自然科学基金项目(11361018),广西自然科学基金项目(2014GXNSFFA118001),广西高校中青年骨干教师基础能力提升项目(ky2016YB167)和桂林电子科技大学研究生教育创新计划项目(2016YJCX46)资助。

\*\* 通信作者:王 硕(1987-),女,讲师,主要从事最优化方法及其应用研究,E-mail:optimization\_zhu@163.com。

# 1 新的谱共轭梯度法

在许多科学研究和工程应用中,很多问题可以转化为下面形式的算子方程

$$Hx = u. \quad (1)$$

我们研究的问题是已知  $H$  和  $u$  反解  $x$ , 这里  $H$  表示线性算子,  $u$  为实验测得的数据, 因而不可避免地带有一定的噪声<sup>[1]</sup>, 即有

$$u_e = u + \eta, \quad (2)$$

这里,  $\eta$  表示与  $u$  维数相同的噪声. 即问题(1)转化为求解

$$Hx = u_e. \quad (3)$$

为了便于求解, 将问题(3)等价转化为求解下面的最小二乘问题:

$$\min f(x) = \|Hx - u_e\|^2. \quad (4)$$

由于  $H$  是一个条件数很大的病态矩阵, 所以问题(3)是一个不适定问题, 因此没有唯一解. 为了克服问题(3)的不适定性, 本文在式(4)的基础上通过增加一个 Tikhonov 正则项  $\|x\|^2$ , 将不适定问题转化为适定问题, 即求解下面的无约束优化问题:

$$\min f(x) = \|Hx - u\|^2 + \alpha \|x\|^2, \quad (5)$$

其中,  $\alpha$  为正则化参数, 而且该参数的选取对问题的求解发挥重要作用.

对于无约束优化问题:

$$\min \{f(x) \mid x \in R^n\}, \quad (6)$$

其中  $f(x)$  为式(5)的目标函数. 共轭梯度法是求解问题(5)的有效方法<sup>[8-10]</sup>, 其标准迭代形式为

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad (7)$$

其中  $\alpha_k$  是 Wolfe 搜索产生的步长,  $d_k$  为搜索方向.  $d_k$  定义为

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k=1, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 2, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $g_k = \nabla f(x_k)$ ,  $\beta_k$  为方向调控参数. 不同的  $\beta_k$  对应不同的共轭梯度法, 其中著名的  $\beta_k$  计算公式<sup>[11-12]</sup> 有

$$\beta_k^{CD} = -\frac{g_k^T g_k}{d_{k-1}^T g_{k-1}}, \beta_k^{LS} = -\frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^T d_{k-1}}. \quad (9)$$

上述由参数  $\beta_k$  构成的方法分别称为 CD 方法和 LS 方法.

Birgin 等<sup>[13]</sup> 结合谱梯度的思想, 提出了下面形式的谱共轭梯度法:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k=1, \\ -\theta_k g_k + \beta_k d_{k-1}, & k > 1, \end{cases} \quad (10)$$

并取

$$\beta_k = \frac{(\theta_k y_{k-1} - s_{k-1})^T g_k}{d_{k-1}^T y_{k-1}}, \quad (11)$$

$$\theta_k = \frac{s_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T y_{k-1}}, \quad (12)$$

其中  $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$ ,  $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ . 基于迭代格(10), 本文给出新的  $\beta_k$  和  $\theta_k$  (文献[14]) 分别为

$$\beta_k = \frac{\|g_k\|^2 + 1}{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})}, \quad (13)$$

$$\theta_k = \frac{(1 + \frac{1}{\|g_k\|^2})g_k^T d_{k-1} - (1 + \frac{2}{\|g_k\|^2})g_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})}. \quad (14)$$

称式(10), (13), (14) 为新的谱共轭梯度法 (SCG). 以下结合 Wolfe 线搜索建立新的谱共轭梯度算法, 并分析算法的收敛性质.

## 算法 1

步骤 1 给定初值  $x_1 \in R^n$ ,  $0 < \delta < 1/2 < \sigma < 1$ ,  $d_1 := -g_1$ ,  $\epsilon \geq 0$ . 如果  $\|g_1\| \leq \epsilon$ , 则停止迭代.

步骤 2 由 Wolfe 线搜索准则计算步长  $\alpha_k$ , 即  $\alpha_k$  满足:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f_k \leq \delta \alpha_k g_k^T d_k, \quad (15)$$

$$g(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma g_k^T d_k. \quad (16)$$

步骤 3 计算  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ . 若  $\|g_{k+1}\| \leq \epsilon$ , 则停止迭代.

步骤 4 由式(13)计算  $\beta_{k+1}$ , 由式(14)计算  $\theta_{k+1}$ , 由  $d_{k+1} = -\theta_{k+1} g_{k+1} + \beta_{k+1} d_k$  计算  $d_{k+1}$ .

步骤 5  $k := k + 1$ , 转步骤 2.

以下均假设  $\|g_k\| \neq 0$ , 否则算法因已找到稳定点而停止.

**引理 1** 设  $\{g_k\}$  和  $\{d_k\}$  为算法 1 生成的序列, 则  $g_k^T d_k < 0, \forall k \geq 1$ . (17)

**证明** 用数学归纳法证明. 当  $k=1$  时,  $g_1^T d_1 = g_1^T (-g_1) = -\|g_1\|^2 < 0$ . 现假设对于  $k-1$  的情形有  $g_{k-1}^T d_{k-1} < 0$  成立, 由式(16) 可得

$$d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1}) \geq (\sigma - 1) g_{k-1}^T d_{k-1} > 0. \quad (18)$$

则对于  $k$  的情形就有

$$\begin{aligned} g_k^T d_k &= g_k^T (-\theta_k g_k + \beta_k d_{k-1}) = \\ &= -(1 + \|g_k\|^2) g_k^T d_{k-1} + (\|g_k\|^2 + 2) g_{k-1}^T d_{k-1} + \\ &\quad \frac{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})}{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})} \\ &= \frac{(\|g_k\|^2 + 1) g_k^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})} = \frac{(\|g_k\|^2 + 2) g_{k-1}^T d_{k-1}}{d_{k-1}^T (g_k - g_{k-1})} < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

从而由数学归纳法知引理 1 成立.

引理 1 说明算法 1 产生的搜索方向是下降方向.

**引理 2** 如果步长因子  $\alpha_k$  满足 Wolfe 线搜索条件, 则有

$$0 < \beta_k < \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}}. \quad (20)$$

**证明** 由式(13) 可得

$$\beta_k = \frac{\|g_k\|^2 + 1}{d_{k-1}^T(g_k - g_{k-1})} > 0. \quad (21)$$

对式(19) 两边同时除以  $g_{k-1}^T d_{k-1}$ , 可得

$$\frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}} = \frac{\|g_k\|^2 + 2}{d_{k-1}^T(g_k - g_{k-1})} > \quad (22)$$

$$\frac{\|g_k\|^2 + 1}{d_{k-1}^T(g_k - g_{k-1})} = \beta_k <$$

$$\frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}}. \quad (23)$$

所以, 引理 2 得证.

## 2 算法的全局收敛性

为了证明算法 1 的全局收敛性, 作如下假设<sup>[14-16]</sup>:

(H<sub>1</sub>) 目标函数  $f(x)$  在其水平集  $\Omega = \{x \in R^n | f(x) \leq f(x_1)\}$  上有界.

(H<sub>2</sub>) 设  $f(x)$  的梯度  $g(x)$  在  $\Omega$  上 Lipschitz 连续, 即存在  $L > 0$ , 使

$$\|g(y) - g(x)\| \leq L \|y - x\|, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (24)$$

**引理 3** 假设(H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) 成立,  $\{g_k\}$  和  $\{d_k\}$  为算法 1 生成的序列, 则

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < +\infty. \quad (25)$$

**证明** 由式(7) 和式(16) 及假设(H<sub>2</sub>), 可得

$$L\alpha_k \|d_k\|^2 \geq d_k^T(g_{k+1} - g_k) \geq (\sigma - 1)g_k^T d_k, \quad (26)$$

从而得到

$$\alpha_k \geq \frac{(\sigma - 1)}{L} \frac{g_k^T d_k}{\|d_k\|^2}. \quad (27)$$

由 Wolfe 搜索准则和  $d_k$  的下降性及假设(H<sub>1</sub>) 知,  $\{f_k\}$  为单调递减的收敛数列, 结合式(27) 可得

$$f_k - f_{k+1} \geq -\delta\alpha_k g_k^T d_k \geq \frac{\delta(1 - \sigma)}{L} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2}. \quad (28)$$

对式(28) 左右两端分别从  $k = 1, 2, \dots$  求和, 再利用  $\{f_k\}$  的收敛性, 可得式(25) 成立, 则引理 3 得证.

**定理 1** 假设(H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) 成立,  $\{g_k\}$  为算法 1 生成的序列, 则

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (29)$$

**证明** 若定理 1 不成立, 则必存在常数  $r > 0$ , 使得对任意的  $k \geq 1$ , 有

$$\|g_k\| \geq r. \quad (30)$$

式(10) 移项, 得  $d_k + \theta_k g_k = \beta_k d_{k-1}$ , 等式两端取模平方, 移项并利用式(20), 可得

$$\|d_k\|^2 = (\beta_k)^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2\theta_k g_k^T d_k - \theta_k^2 \|g_k\|^2 < \frac{(g_k^T d_k)^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} \|d_{k-1}\|^2 - 2\theta_k g_k^T d_k -$$

$$\theta_k^2 \|g_k\|^2. \quad (31)$$

式(31) 两端同时除以  $(g_k^T d_k)^2$ , 可得

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} < \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} - \frac{2\theta_k}{g_k^T d_k} - \frac{\theta_k^2 \|g_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} = \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2} - \left( \frac{1}{\|g_k\|} + \frac{\theta_k \|g_k\|}{g_k^T d_k} \right)^2 < \frac{\|d_{k-1}\|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\|g_k\|^2}. \quad (32)$$

由式(32) 的递推, 并利用  $d_1 = -g_1$ , 可得

$$\frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} < \frac{\|d_1\|^2}{\|g_1 d_1\|^2} + \sum_{i=2}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\|g_i\|^2}. \quad (33)$$

结合式(30), 可得

$$\frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} > \frac{r^2}{k}. \quad (34)$$

对式(34) 两端分别求和可得

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} > r^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = +\infty, \quad (35)$$

显然, 式(35) 与式(25) 矛盾, 所以定理 1 成立.

## 3 数值实验

算法测试的环境为 Matlab 2013a, Windows 7 操作系统, Intel(R)Core(TM) i3-2370M CPU @6.40 GHz. 用 Matlab 的 rand 函数在真实解上添加一定水平的噪声. 参数  $\delta = 0.025$ ,  $\sigma = 0.9$ ,  $\alpha = 0.014$ . 为了评价不同方法的求解效果, 引入真实解和数值解的均方根误差(RMSE)的指标<sup>[17-18]</sup>来衡量:

$$\text{RMSE} = \frac{\|x - x_k\|_2}{\|x\|_2}, \quad (36)$$

其中,  $x$  和  $x_k$  分别是真实解和数值解, 显然 RMSE 越小, 数值解对应的算法越好. 停止准则是

$$\|g_k\| \leq 10^{-5}. \quad (37)$$

### 例 1 卷积方程的反演

考察在位势理论中有重要应用的卷积方程<sup>[1]</sup>:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \ln(4\sin^2(t - t')/2))x(t')d(t') =$$

$$u(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (38)$$

其中  $u(t)$  与位势方程边界条件有关, 弱奇异性核  $H(t, t') = 1 - \ln(4\sin^2(t - t')/2)$ . 现将式(38) 记为算子形式:

$$\int_0^{2\pi} H(t, t')x(t')dt' = u(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (39)$$

用配置法离散式(39) 得到离散的算子方程  $H(t)x(t) = u(t)$ .

假设观测数据是在真实数据上添加一定噪声水平的高斯白噪声<sup>[19]</sup>, 则有

$$u_e = u + e * \text{rand}(\text{size}(u)), \quad (40)$$

其中,  $e$  表示噪声水平,  $\text{rand}(\cdot)$  表示维数与  $u$  相同的高斯白噪声, 即有

$$H(t)x(t) = u_e(t). \quad (41)$$

问题(41) 等价于求解下列无约束优化问题:

$$\min f(x(t)) = \| H(t)x(t) - u_e(t) \|^2. \quad (42)$$

为了克服问题(41) 的不适定性, 引入 Tikhonov 正则项, 即该问题转化为求解下述问题:

$$\min f(x(t)) = \| H(t)x(t) - u_e(t) \|^2 + \gamma \| x(t) \|^2, \quad (43)$$

这里,  $\alpha$  表示正则化参数.

选择核函数  $H(t)$  和真实解  $x_{\text{true}}(x)$ :

$$x_{\text{true}} = \exp(3 \sin t), \quad (44)$$

$$H(t) = \frac{1}{0.05\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(t-1/200)^2}{0.05^2}\right). \quad (45)$$

在实验中, 离散点设置为 256 个单位, 即矩阵  $H(t) \in R^{256 \times 256}$ , 真实解  $x_{\text{true}}(w, t) \in R^{256}$ , 观测数据  $u_e(t)$  的噪声水平设置为  $e=0.01$ , 现用观测数据  $u_e(t)$  来反演  $x(t)$ .

为了更公平的测试算法的速度, 每个实验重复做 10 次, 结果的平均值见表 1. 从表 1 可以看出本文提出的谱共轭梯度法 (SCG) 的 REMS 值相对较小, 且求解过程所需的迭代次数和 CPU 时间也是最小的, 说明 SCG 方法所需更少的计算代价.

从图 1~4 可以看出 SCG 方法具有一定的优势.

从图 5 的效果图也可以得出 SCG 方法是有效的.

表 1 4 种算法的数值结果

Table 1 Numerical results of four algorithms

方法 Method	迭代次数 Iteration times	时间 Time	REMS
Landweber <sup>[20]</sup>	8	1.045	0.004 4
TSVD <sup>[21]</sup>	12	1.201 2	0.014 1
TV <sup>[21]</sup>	6	2.004	0.025 1
SCG	5	0.143 6	0.001 9

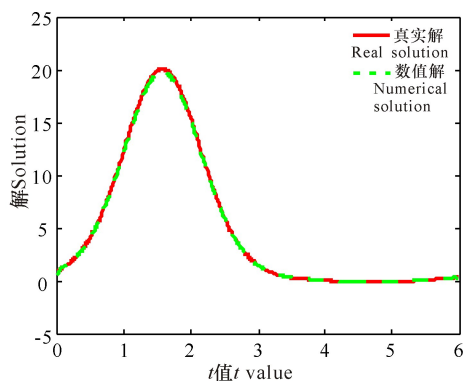


图 1 Landweber 法求解例 1 的数值结果

Fig. 1 Numerical results of sample 1 obtained from Landweber method

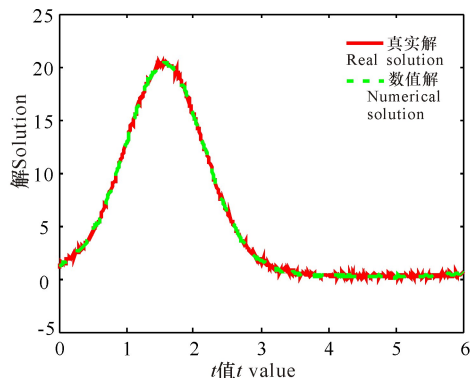


图 2 TSVD 法求解例 1 的数值结果

Fig. 2 Numerical results of sample 1 obtained from TSVD method

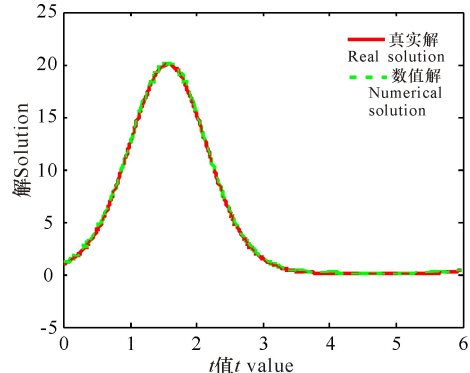


图 3 TV 法求解例 1 的数值结果

Fig. 3 Numerical results of sample 1 obtained from TV method

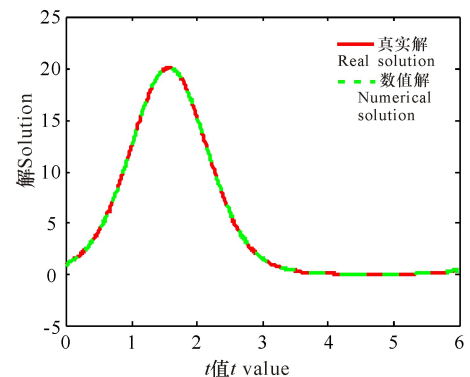


图 4 SCG 法求解例 1 的数值结果

Fig. 4 Numerical results of sample 1 obtained from SCG method

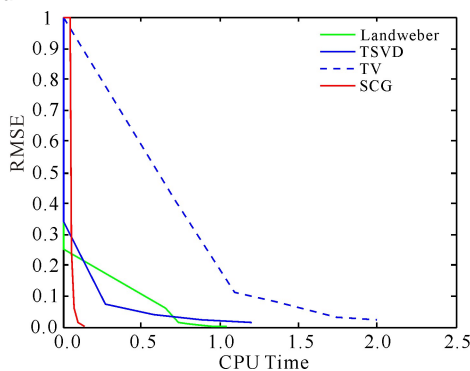


图 5 例 1 效果图

Fig. 5 Effects diagram for sample 1

## 例 2 图像处理的反演问题

考察简单的一维情形图像识别问题, 如方程:

$$\int_a^b h(t-t')x(t') = u(t), \quad (46)$$

其中  $x(t')$  代表光源强度,  $u(t)$  代表观测的图像, 通常是一个模糊核的连续图像;  $h(t-t')$  表示成像的过程, 通常是一个点扩展函数 (PSF). 问题给定光源函数  $x(t')$  和点扩展函数  $h(t-t')$  来求观测图像  $u(t)$ . 与此相关的反问题: 给定点扩展函数  $h(t-t')$  和观测图像  $u(t)$  来确定光源强度  $x(t')$ .

由有限差分法离散式 (39) 得到离散的算子方程

$$H(t)x(t) = u(t), \quad (47)$$

假设观测数据为在真实数据上添加 imnoise 函数产生的高斯噪声, 则有

$$u_e = u + e * \text{imnoise}(\text{size}(u)), \quad (48)$$

其中,  $e$  表示噪声水平,  $\text{imnoise}(\cdot)$  表示维数与  $u$  相同的高斯噪声, 即有

$$H(t)x(t) = u_e(t). \quad (49)$$

问题 (49) 等价于求解下列无约束优化问题:

$$\min f(x(t)) = \| H(t)x(t) - u_e(t) \|^2. \quad (50)$$

为了克服问题 (49) 的不适定性, 引入 Tikhonov 正则项, 即转该问题化为求解下述问题:

$$\min f(x(t)) = \| H(t)x(t) - u_e(t) \|^2 + \gamma \| x(t) \|^2, \quad (51)$$

这里,  $\gamma$  表示正则化参数.

选择核函数  $H(t)$  和真实解  $x_{\text{true}}(x)$ :

$$x_{\text{true}} = \sin^4(2\pi t), \quad (52)$$

$$H(t) = \frac{1}{1 + 100(t - 0.5)^2}. \quad (53)$$

在实验中, 离散点设置为 512 个单位, 即矩阵  $H(t) \in R^{512 \times 512}$ , 真实解  $x_{\text{true}}(\omega, t) \in R^{512}$ , 观测数据  $u_e(t)$  的噪声水平设置为  $e=0.02$ , 现用观测数据  $u_e(t)$  来反演  $x(t)$ .

为了更公平的测试算法的速度, 每个实验重复做 10 次 (表 2). 从表 2 可以看出, SCG 方法的 RMSE 值是 0.012, 在 4 个算法中相对较小, 而且求解过程所需的迭代次数和 CPU 时间都相对较小, 因此 SCG 方法所需求解成本相对较低.

从图 6~9 可以看出 SCG 方法的数值解比较理想的逼近真实解. 从图 10 的效果图也可以得出, SCG 方法比其他 3 种算法更有效.

表 2 4 种算法的数值结果

Table 2 Numerical results of four algorithms

方法	迭代次数	时间	REMS
Method	Iteration times	Time	REMS
Langweber <sup>[20]</sup>	9	1.44	0.066
TSVD <sup>[21]</sup>	19	3.95	0.121
TV <sup>[21]</sup>	18	3.63	0.152
SCG	6	0.53	0.012

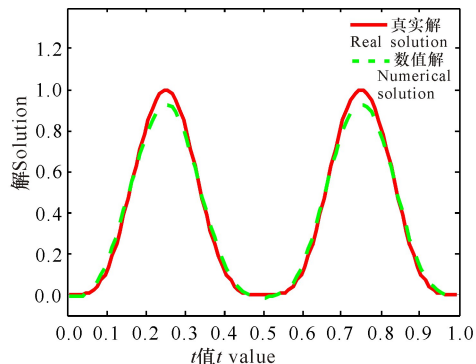


图 6 Landweber 法求解例 2 的数值结果

Fig. 6 Numerical results of sample 2 obtained from Landweber method

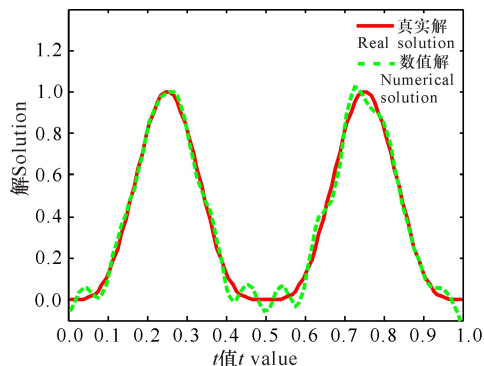


图 7 TSVD 法求解例 2 的数值结果

Fig. 7 Numerical results of sample 2 obtained from TSVD method

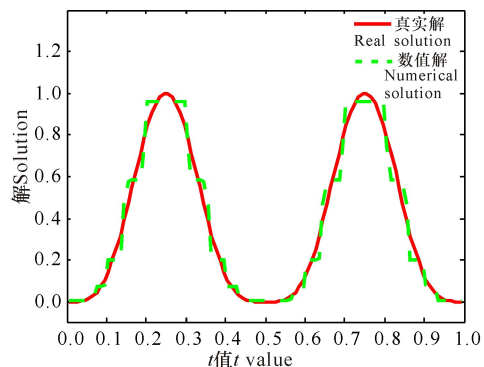


图 8 TV 法求解例 2 的数值结果

Fig. 8 Numerical results of sample 2 obtained from TV method

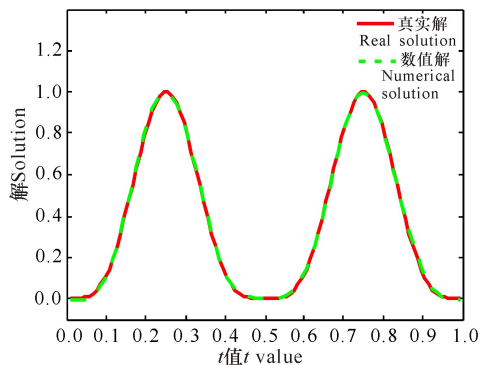


图9 SCG法求解例2的数值结果

Fig. 9 Numerical results of sample 2 obtained from SCG method

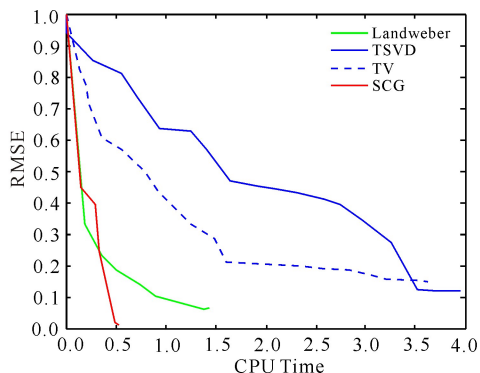


图10 例2效果图

Fig. 10 Effects diagram for sample 2

## 4 结论

本文提出一个求解线性逆问题的新谱共轭梯度法,证明了该算法的全局收敛性,并利用该方法对卷积方程的反演问题和图像处理的反演问题进行数值实验,发现该方法比 Landweber, TSVD 和 TV 方法更有效。

### 参考文献:

[1] 肖庭延,于慎根,王彦飞. 反问题的数值解法[M]. 北京: 科学出版社,2003:166-174.  
XIAO T Y, YU S G, WANG Y F. Numerical Solution of Inverse Problem[M]. Beijing: Science Press, 2003: 166-174.

[2] LIU W, WU C S. A predictor-corrector iterated Tikhonov regularization for linear ill-posed inverse problems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 221: 802-818.

[3] JIN Q N. On a regularized Levenberg-Marquardt method for solving nonlinear inverse problems[J]. Numerische Mathematik, 2010, 115(2): 229-259.

[4] ZHANG J Z, JIAN J B, TANG C M. Inverse problems

and solution methods for a class of nonlinear complementarity problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 49(2): 271-297.

[5] 江羨珍,马国栋,简金宝. Wolfe 线搜索下一个新的全局收敛共轭梯度法[J]. 工程数学学报, 2011, 28(6): 779-786.  
JIANG X Z, MA G D, JIAN J B. A new globally convergent conjugate gradient method with Wolfe line search [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2011, 28(6): 779-786.

[6] 江羨珍,韩麟,简金宝. Wolfe 线搜索下一个全局收敛的混合共轭梯度法[J]. 计算数学, 2012, 34(1): 103-112.  
JIANG X Z, HAN L, JIAN J B. A globally convergent mixed conjugate gradient method with Wolfe line search [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2012, 34(1): 103-112.

[7] JIAN J B, HAN L, JIANG X Z. A hybrid conjugate gradient method with descent property for unconstrained optimization[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(3/4): 1281-1290.

[8] 简金宝,尹江华,江羨珍. 一个充分下降的有效共轭梯度法[J]. 计算数学, 2015, 37(4): 415-424.  
JIAN J B, YIN J H, JIANG X Z. An efficient conjugate gradient method with sufficient descent property [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2015, 37(4): 415-424.

[9] 韩麟,简金宝,江羨珍. Armijo 线搜索下一个杂交共轭梯度法及其强收敛性[J]. 玉林师范学院学报: 自然科学, 2013, 34(2): 17-21.  
HAN L, JIAN J B, JIANG X Z. A mixed conjugate gradient method with Armijo linear search and its strong convergence [J]. Journal of Yulin Normal University: Natural Science, 2013, 34(2): 17-21.

[10] JIANG X Z, JIAN J B. Two modified nonlinear conjugate gradient methods with disturbance factors for unconstrained optimization [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(1/2): 387-397.

[11] POLAK E, RIBIÈRE G. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées[J]. Revue Française D'informatique et de Recherche Opérationnelle, 1969, 16: 35-43.

[12] POLYAK B T. The conjugate gradient method in extreme problems[J]. Ussr Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1969, 9(4): 94-112.

[13] BIRGIN E G, MARTÍNEZ J M. A spectral conjugate gradient method for unconstrained optimization [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2001, 43(2): 117-128.

(下转第 427 页 Continue on page 427)

par elements finis d'ordre un, et la resolution, par penalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet nonlineares[J]. *Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationelle, Series R*, 1975, 31(5/6):41-76.

[2] GABAY D, MERCIER B. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1976, 2(1):17-40.

[3] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1):1-122.

[4] YANG L, PONG T K, CHEN X J. Alternating direction method of multipliers for a class of nonconvex and nonsmooth problems with applications to background/foreground extraction[J]. *Mathematics*, 2016.

[5] HONG M Y, LUO Z Q, RAZAVIYAYN M. Convergence analysis of alternating direction method of multipliers for a family of nonconvex problems[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2014, 26(1):337-364.

[6] WANG Y, YIN W T, ZENG J S. Global Convergence of ADMM in Nonconvex Nonsmooth Optimization[R]. *UCLA CAM Report 15-62*, 2015.

[7] LI G Y, PONG T K. Douglas-Rachford splitting for non-

convex optimization with application to nonconvex feasibility problems[J]. *Mathematical Programming*, 2016, 159(1/2):374-401.

[8] WANG F H, XU Z B, XU H K. Convergence of multi-block Bregman ADMM for nonconvex composite problems[J]. *Mathematics*, 2015, arXiv:1505.03063v1:1-25.

[9] GUO K, HAND R, WUT T. Convergence of alternating direction method for minimizing sum of two nonconvex functions with linear constraints[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2016:1-17.

[10] BOLTE J, DANIILIDIS A, LEY O, et al. Characterizations of Lojasiewicz inequalities and applications[J]. arXiv:0802.0826v1, 2008:1-48.

[11] ATTOUCH H, BOLTE J, REDONT P, et al. A Proximal alternating minimization and projection methods for nonconvex problems: An approach based on the Kurdyka-Lojasiewicz inequality[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2010, 35(2):438-457.

[12] BOLTE J, SABACH S, TEBOULLE M. Proximal alternating linearized minimization for nonconvex and nonsmooth problem[J]. *Mathematical Programming*, 2013, 146(1/2):459-494.

(责任编辑:米慧芝)

(上接第 421 页 Continue from page 421)

[14] JIANG X Z, JIAN J B. A sufficient descent Dai-Yuan type nonlinear conjugate gradient method for unconstrained optimization problems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(1/2):101-112.

[15] 江羨珍, 简金宝, 马国栋. 具有充分下降性的两个共轭梯度法[J]. *数学学报*, 2014, 57(2):365-372.

JIANG X Z, JIAN J B, MA G D. Two conjugate gradient methods with sufficient descent property[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2014, 57(2):365-372.

[16] 马国栋, 简金宝, 江羨珍. 一个具有下降性的改进 Fletcher-Reeves 共轭梯度法[J]. *应用数学学报*, 2015, 38(1):89-97.

MA G D, JIAN J B, JIANG X Z. An improved Fletcher-Reeves conjugate gradient method with descent property[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2015, 38(1):89-97.

[17] ZHANG B X, ZHU Z B, LI S A. A modified spectral conjugate gradient projection algorithm for total variation image restoration[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2014, 27:26-35.

[18] ZHANG B X, ZHU Z B, WANG S. A simple primal-

dual method for total variation image restoration[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2016, 38:814-823.

[19] ZHANG B X, ZHU Z B. A modified quasi-Newton diagonal update algorithm for total variation denoising problems and nonlinear monotone equations with applications in compressive sensing[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2015, 22(3):500-522.

[20] 曹莉, 王伟. 求解非线性不适定问题的连续 Landweber 型正则化方法[J]. *黑龙江大学自然科学学报*, 2014, 31(2):165-170.

CAO L, WANG W. Continuous Landweber type regularization method for solving nonlinear ill-posed problem[J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2014, 31(2):165-170.

[21] VOGEL C R. *Computational Methods for Inverse Problems*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011:1-11.

(责任编辑:尹 闯)