网络优先数字出版时间:2017-07-13　　DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.20170713.001
网络优先数字出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/45.1206.G3.20170713.1029.002.html

相互拖拽对爆炸式同步的影响*

Effects of Mutual Entrainment on Explosive Synchronization

章一才[1],郭　言[1],施　映[1],周　羁[1],薛　郁[1,2]**
ZHANG Yicai[1],GUO Yan[1],SHI Ying[1],ZHOU Ji[1],XUE Yu[1,2]

(1.广西大学物理科学与工程技术学院,广西南宁　530004;2.广西相对论天体物理重点实验室,广西南宁　530004)
(1.School of Physical Science and Technology,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China;2.Guangxi Key Laboratory for the Relativistic Astrophysics,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:【目的】在 Kuramoto 模型基础上,研究拖拽因子对复杂网络中爆炸式同步的影响。**【方法】**在无标度网络的 Kuramoto 模型基础上,引入拖拽因子 $\sin\beta$,并对具有拖拽因子的 Kuramoto 模型进行数值模拟,同时在星形网络上对其进行理论分析。**【结果】**当拖拽因子的 β 值在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 时可以使同步提前,当拖拽因子的 β 值在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 时,则会使同步退后。**【结论】**相互拖拽作用对无标度网络及星形网络的爆炸式同步有较大影响,通过调节拖拽因子的 β 值,可以有效控制同步的提前与退后。

关键词: Kuramoto 模型　同步　无标度网络　星形网络　相互拖拽
中图分类号:O414.13　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1005-9164(2017)04-0340-04

Abstract:【Objective】Based on Kuramoto model, we explored the effect of the entrainment factors ($\sin\beta$) on the explosive synchronization.**【Methods】**Based on Kuramoto model in the complex network and by introducing the entrainment factors ($\sin\beta$), we carried out the Kuramoto model with the entrainment factors ($\sin\beta$) in the scale-free network for numerical simulation and made a theoretical analysis in the star networks.**【Results】**When $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, the synchronization will be advanced. When $\beta\in(-\frac{\pi}{2},0)$, the synchronization will be delayed.**【Conclusion】**The mutual entrainment has a great effect on the explosive synchronization of the scale-free network and the star network, the advancement and backward of synchronization can be effectively controlled by adjusting the value of entrainment factors.

Key words: Kuramoto model, synchronization, scale-free network, star network, mutual entrainment

收稿日期:2017-05-15
修回日期:2017-06-13
作者简介:章一才(1994-),男,研究生,主要从事非线性系统的动力学研究。
*国家自然科学基金项目(11262003),广西自然科学基金项目(20140593)和广西研究生创新项目(YCSZ2012013)资助。
**通信作者:薛　郁(1963-),男,博士生导师,教授,主要从事交通流动力学研究,E-mail:yuxuegxu@gxu.edu.cn。

0　引言

【研究意义】近年来,复杂网络的发展速度十分迅猛,复杂网络也逐渐成为物理学、计算机科学、数学等

多领域交叉的热点研究问题,对复杂网络中同步现象的研究对社会实践有着重要的影响与指导意义[1-2]。复杂网络上的耦合相位振子的同步化对研究网络中振子出现自发的集体行为现象有重大意义。**【前人研究进展】**自 Kuramoto 模型提出以来,该模型已有广泛的应用,如研究一阶与二阶相互作用项对同步的影响[3],或者讨论基于该模型在极限环振子中加入时间延迟因素后的影响[4],又或者讨论噪声[5]或错位[6]对爆炸式同步的影响等等。在众多的工作中,Gómez-Gardeñes 等[7]从微观层面研究在复杂网络中爆炸式同步是如何产生的,并在星形网络中给出分析研究,重现无标度网络中的结果;Sakaguchi 等[8]在规则网络上分别讨论相位振子之间的错位和相互拖拽对系统同步的影响。**【本研究切入点】**在现实生活中,仅有 Kuramoto 模型是不能反应更复杂的系统的。在无标度网络中加入相互拖拽因子,可以针对某些更复杂的问题给出理论依据;而对在星形网络加入相互拖拽的研究,则可更深刻地理解无标度网络中相互拖拽的影响。**【拟解决的关键问题】**在原有 Kuramoto 模型基础上,加入相互拖拽因子,并进行数值仿真,分析在无标度网络中相互拖拽对同步的影响。由于星形网络有无标度网络的主要性质[7],故在考虑减少分析困难的基础上,对星形网络中加入相互拖拽因子对同步的影响做理论分析,以求更深入理解无标度网络下的情形。

1 模型的建立

1970 年 Kuramot 模型被提出[9-11]。在一个无权重、无向的网络中,每一个振子的相位定义为 $\theta_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,N)$,并且每个振子 $\theta_i(t)$ 随时间演变的方程满足:

$$\dot{\theta}_i=\omega_i+\lambda\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\sin(\theta_j-\theta_i),\quad i=1,2,\cdots,N, \tag{1}$$

其中,ω_i 为本征频率,A_{ij} 为邻接矩阵(当振子的第 i 节点与第 j 节点连接时,$A_{ij}=1$;当振子的第 i 节点与第 j 节点无连接时,$A_{ij}=0$),λ 代表振子 i 与 j 间的耦合强度大小。

原始的 Kuramot 模型假定所有的振子都是连接在一起的,即对于所有的 i 与 j,都有 $A_{ij}=1$,并发现当振子的本征频率 ω_i 等于振子的度 k_i 时,会发生爆炸式同步[7]。同时使用序参量 r 来量化同步的程度,而序参量 r 被定义为

$$r(t)e^{i\psi(t)}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{i\theta_j}, \tag{2}$$

序参量 r 满足 $0\leqslant r\leqslant 1$,当 $r=1$ 时,网络中的振子达到完全同步;当 $r=0$ 时,则网络中振子全体展现出不一致的状态[10-11]。

在无标度网络上,考虑 Sakaguchi 模型[8],加入拖拽因子 $\sin\beta$,讨论 $\sin\beta$ 对同步的影响。该模型为

$$\dot{\theta}_i=\omega_i+\lambda\sum_{j=1}^{N}A_{ij}(\sin(\theta_j-\theta_i)+\sin\beta),$$
$$i=1,2,\cdots,N。 \tag{3}$$

根据三角函数的性质,只需讨论 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的范围即可。设定振子 ω_i 等于节点的度 k_i,度分布满足幂律关系 $p(k)\propto k^{-\nu}$,$\upsilon=3$。

为探究 $\sin\beta$ 对同步的影响,可以采用有 100 个振子的无标度网络,同时为从微观层次对同步进程进行研究,定义平均有效频率为

$$\omega_i^{eff}=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T}\dot{\theta}_i(\tau)d\tau。 \tag{4}$$

将时间设为 $T=10\ 000$,在无标度网络上,采用四阶龙格库塔方法,设置时间步长为 $\mathrm{d}t=0.01$,求平均有效频率 $<\omega_i>$ 和序参量 r 随耦合强度 λ 的变化关系。

2 模型的数值模拟

对方程(3)进行数值模拟,可以得到平均有效频率 $<\omega_i>$ 和耦合强度 λ 的变化关系(图 1)以及序参量 r 随耦合强度 λ 的变化关系(图 2)。从图 1 与图 2 可以看出,对比 β 为 π 的情况,当 $\sin\beta$ 的值为正值,$\sin\beta$ 对同步起到提前的作用,并且 $\sin\beta$ 值越大,临界耦合强度 λ_c 越提前;但是当 $\sin\beta$ 为负值时,对同步则会产生滞后的影响,并且 $\sin\beta$ 值越小,临界耦合强度 λ_c 越滞后。

3 理论分析

为简单起见,可以在星形网络中做理论分析,因为星形网络的结构特点抓住了无标度网络的主要特征[7]。在星形网络中,依旧设定振子 ω_i 等于节点的度 k_i。

在星形网络中,建立一个旋转坐标系,该系统的平均相位可以表达为 $\psi(t)=\psi(0)+\Omega t$,其中 Ω 为星形网络振子的平均频率[7],可以设置 $\psi(0)=0$。如此可以定义 $\phi_h=\theta_h-\psi=\theta_h-\Omega t$,$\phi_j=\theta_j-\psi=\theta_j-\Omega t$,其中 θ_h 表示中心节点振子的相位,θ_j 为边缘节点振子的相位。

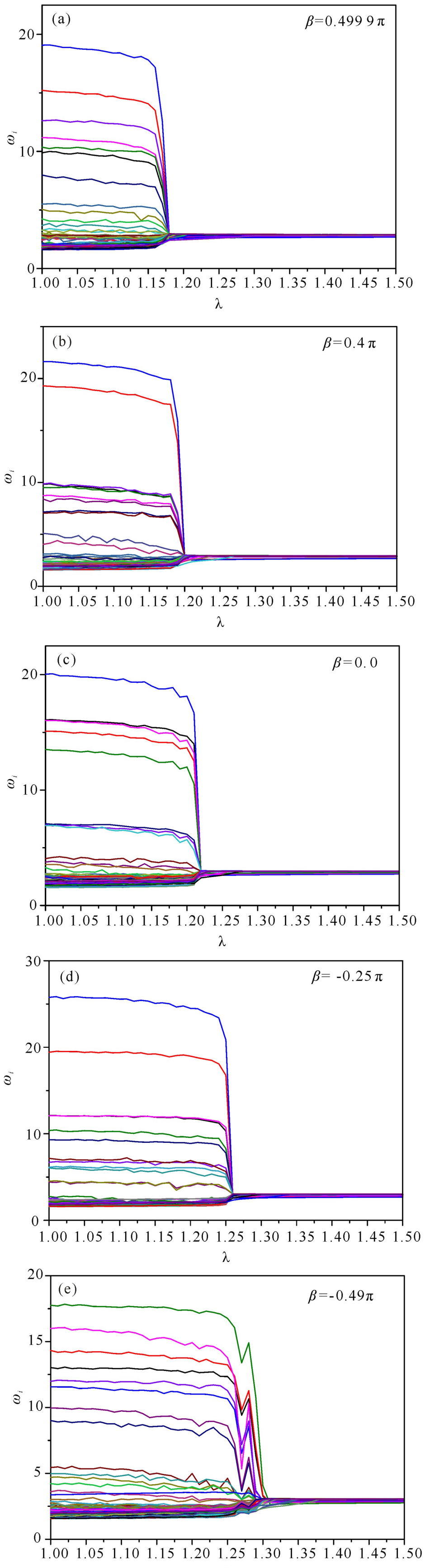

图 1　平均有效频率 $<\omega_i>$ 和耦合强度 λ 的分布

Fig. 1　$<\omega_i>$ and coupling strength λ

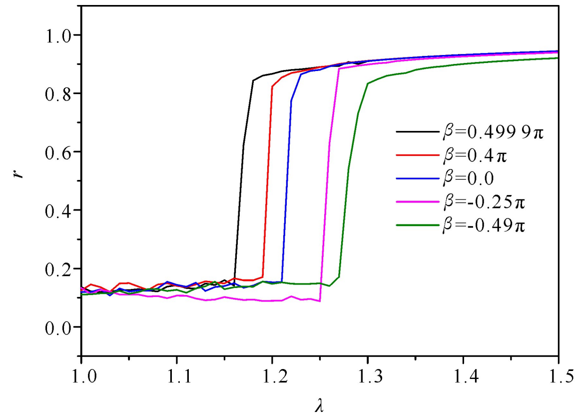

图 2　序参量 r 和耦合强度 λ 的关系

Fig. 2　The relationship between the order parameter r and the coupling strength λ

设星形网络节点数为 $(k+1)$，中心节点振子与边缘节点振子的运动方程可以写成：

$$\dot{\phi}_h = (\omega_h - \Omega) + \lambda \sum_{i=1}^{k} (\sin(\phi_j - \phi_h) + \sin\beta),$$

$$\dot{\phi}_j = (\omega - \Omega) + \lambda(\sin(\phi_h - \phi_j) + \sin\beta), j = 1, 2, \cdots, k, \tag{5}$$

且

$$\omega_h = k, \omega = 1, \Omega = \frac{2k}{k+1}, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)。$$

现在计算锁定相位 $\dot{\phi}_h = 0$ 时的情况。利用(2)式，可以计算得到

$$re^{i\psi(t)} = \frac{e^{i\theta_h} + \sum_{j=1}^{k} (e^{i\theta_j})}{1+k},$$

两边同乘 $e^{-i\theta_h}$，可得

$$re^{-i\dot{\phi}_h} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{k} e^{i(\theta_j - \theta_h)}}{1+k}。$$

取虚数部分可得

$$-r \cdot \sin\phi_h = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sin(\theta_j - \theta_h)}{1+k},$$

并结合式(5)可得

$$\dot{\phi}_h = -\lambda \cdot (1+k) \cdot r\sin\phi_h + (\omega_h - \Omega) + \lambda \cdot k\sin\beta。$$

当 $\dot{\phi}_h = 0$ 时，有

$$\sin\phi_h = \frac{(\omega_h - \Omega) + \lambda \cdot k\sin\beta}{\lambda \cdot (1+k) \cdot r},$$

而锁定相位 $\dot{\phi}_j = 0$ 时，有

$$\sin(\phi_h - \phi_j) = \frac{\Omega - \omega - \lambda\sin\beta}{\lambda},$$

所以，可以计算得到

$$\cos\phi_j = \frac{\Omega - \omega - \lambda\sin\beta}{\lambda}\sin\phi_h \pm \frac{\sqrt{[\lambda^2 - (\Omega - \omega - \lambda\sin\beta)^2]\cdot(1-\sin\phi_h)}}{\lambda}。$$

由此，可得 $\lambda \geqslant \frac{\Omega - \omega}{1+\sin\beta}$，所以星形网络在锁相情况下的临界耦合强度为 $\lambda_c = \frac{\Omega - \omega}{1+\sin\beta}$。当 $\sin\beta < 0$ 时，λ_c 会滞后，即同步滞后；当 $\sin\beta > 0$ 时，λ_c 会提前，即同步提前。

4 结论

本研究在无标度网络及星形网络中讨论加入拖拽因子后的 Kuramoto 模型，通过数值模拟，发现在无标度网络中，会发生爆炸式同步，并且拖拽因子对临界耦合强度产生影响，当拖拽因子为正值时，临界耦合强度减小，同步提前；反之，当拖拽因子为负值时，临界耦合强度增大，同步滞后。理论上分析星形网络中也存在爆炸式同步，拖拽因子对同步起到了与无标度网络中相同的作用。

参考文献：

[1] 孙玺菁，司守奎. 复杂网络算法与应用[M]. 北京：国防工业出版社，2015.
SUN X J，SI S K. Complex network algorithms and applications[M]. Beijing：National Defense Industry Press，2015.

[2] 苏桂锋. 复杂网络上的爆炸式同步与级联效应[D]. 上海：华东师范大学，2014.
SU G F. Explosive synchronization and cascading failure in complex network[D]. Shanghai：East China Normal University，2014.

[3] LI K R，MA S，LI H H，et al. Transition to synchronization in a Kuramoto model with the first- and second-order interaction terms[J]. Physical Review E，2014，89(3)：032917.

[4] SCHUSTER H G，WAGNER P. Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling[J]. Progress of Theoretical Physics，1989，81(5)：939-945.

[5] SKARDAL P S，ARENAS A. Disorder induces explosive synchronization[J]. Physical Review E，2014，89(6)：062811.

[6] HUANG X，GAO J，SUN Y T，et al. Effects of frustration on explosive synchronization[J]. Frontiers of Physics，2016，11(6)：110504.

[7] GÓMEZ-GARDEÑES J，GÓMEZ S，ARENAS A，et al. Explosive synchronization transitions in scale-free networks[J]. Physical Review Letters，2011，106(12)：128701.

[8] SAKAGUCHI H，SHINOMOTO S，KURAMOTO Y. Mutual entrainment in oscillator lattices with nonvariational type interaction[J]. Progress of Theoretical Physics，1988，79(5)：1069-1079.

[9] KURAMOTO Y. Chemical oscillations，waves，and turbulence[M]. Berlin Heidelberg：Springer，1984：431-450.

[10] STROGATZ S H. From Kuramoto to Crawford：Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators[J]. Physica D：Nonlinear Phenomena，2000，143(1/2/3/4)：1-20.

[11] RODRIGUES F A，PERON T K D，JI P，et al. The Kuramoto model in complex networks[J]. Physics Reports，2016，610：1-98.

（责任编辑：米慧芝）