

一类耦合时滞复杂动态网络的分布采样同步*

Distributed Sampled-data Synchronization for a Class of Complex Dynamical Networks with Coupling Delays

蒋志勇,卢小梅,陈武华**

JIANG Zhiyong, LU Xiaomei, CHEN Wuhua

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:基于分布采样控制策略研究具有耦合时变时滞的复杂动态网络(Complex Dynamical Networks, CDNs)的状态同步问题.引入时间依赖的 Lyapunov 函数分析同步误差系统的稳定性.运用 Jensen 不等式处理积分项,并结合凸组合技术,建立了具有较少保守性的分布采样同步判据;并给出了设计具有最小耦合力的分布采样同步控制器的迭代算法.与以往文献结果相比,本研究所得到的判据放宽了采样区间的上界,降低了保守性.最后,通过两个数值实例验证了所提方法的有效性.

关键词:复杂动态网络 分布采样控制 时间依赖的 Lyapunov 函数 Jensen 不等式 最小耦合力

中图分类号:TP273 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2017)06-0597-12

Abstract: Based on the distributed sampled-data control strategy, the state synchronization problem of complex dynamical networks with coupling time-varying delays was studied. A time-dependent Lyapunov function was introduced to analyze the stability of the resulting synchronization error system. Combined with the convex combination technique, the Jensen inequality was used to deal with the integral term. A less conservative criterion for distributed sampled-data synchronization was established. Furthermore, an optimal algorithm for designing the distributed sampled-data synchronization controller with the minimal coupling force was also presented. Compared with the previous literature results, the derived synchronization criterion relaxed the restriction on upper bound of the sampling interval and reduces the conservativeness. Finally, two numerical examples were given to verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: complex dynamical networks, distributed sampled-data control, time-dependent Lyapunov function, Jensen inequality, the minimal coupling force

收稿日期:2017-08-29

作者简介:蒋志勇(1989-),男,博士研究生,主要从事复杂系统与切换系统的分析与设计研究。

* 国家自然科学基金项目(61573111),国家自然科学基金重点项目(61633011)和广西自然科学基金项目(2015GXNSFAA139003)资助。

** 通信作者:陈武华(1967-),男,教授,主要从事系统控制研究, E-mail: wuhua_chen@163.com。

0 引言

【研究意义】随着数字控制技术逐步取代模拟控制技术,采样控制在工程领域得到了越来越广泛的应用.采样控制的主要特征是利用系统在一系列离散时刻的采样信息,对系统施加反馈控制.这表明,在采样控制框架下,需要传输的信息量大大减少,从而减少

了带宽的使用,并增加了控制器的鲁棒性.基于采样控制这些显著优点,不少学者应用采样控制策略研究非线性系统的状态估计与同步控制问题.【前人研究进展】Chen 等^[1]研究了带有非均匀采样的 Lipschitz 非线性系统的观测器设计问题.通过构造一个时间依赖的 Lyapunov 函数来捕捉误差系统的动态特征,建立了一个保守性较小的稳定性判据. Zhang 等^[2]讨论了混合时滞神经网络的采样同步问题.基于 Lyapunov 泛函方法,输入时滞和改进的自由权重矩阵方法,推导出了时滞神经网络指数同步判据. Lu 等^[3]和 Chen 等^[4]通过采样反馈控制研究了混沌 Lur'e 系统的主从同步问题,利用自由权重矩阵方法得到了混沌 Lur'e 系统全局渐近同步的充分条件.近年来,基于离散时刻的采样信息,建立复杂动态网络(Complex Dynamical Networks, CDNs)同步准则,也取得了一些结果.基于采样信息的同步控制策略可以分为采样控制策略和脉冲控制策略. Chen 等^[5-6]分别基于分散脉冲控制策略和分布脉冲控制策略研究了 CDNs 的全局同步问题. Li 等^[7]研究了一类具有耦合时滞的 CDNs 的采样同步控制问题,通过把采样周期转换为一个有界的时变时滞,从而把采样同步问题转化为一个具有多时滞的微分等式的稳定性问题.通过构造一个 Lyapunov 泛函和利用 Jensen 不等式推导出了具有多时滞的微分等式的指数稳定的充分条件. Shen 等^[8]研究了 CDNs 的随机采样同步问题,采样周期在两个不同的值之间依概率切换. Lee 等^[9]基于时滞采样控制策略研究了具有时变耦合时滞 CDNs 的同步问题.基于扩展的 Wirtinger 不等式,构造了不连续的 Lyapunov 函数,并以线性矩阵不等式(LMIs)的形式给出了 CDNs 的稳定性判据. Wu 等^[10]通过采样控制策略研究了一类具有耦合时变时滞的 CDNs 的指数同步问题,并建立了 CDNs 指数同步的判据,值得注意的是,这里的采样周期是时变有界的. Jia 等^[11]研究了多智能体网络的采样同步问题.对于不同拓扑结构连接方法的多智能体网络的采样周期上界的最小值进行了分析. Wang 等^[12]基于时间依赖的 Lyapunov 函数方法研究了连续动态网络的采样同步问题,以 LMIs 的形式给出了连续动态网络的同步判据,并对采样周期上界的最大值进行估计.上述文献所采用的分析方法都是时不变的 Lyapunov 函数方法,并不能充分体现采样控制器对受控系统的影响.为此,一些研究者通过构造时间依赖的 Lyapunov 函数来考虑 CDNs 的状态同步问题. Wang 等^[13]研究了一类具有耦合时变时滞和随机耦合力的 CDNs 的采样同步问题.通过构造不连续的 Lyapunov 函数建立

了时滞相关的均方同步判据,基于所建立的同步判据对系统设计了采样控制器.

文献[11]所考虑的线性多智能体网络具有如下形式:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + u_i(t), i \in \mathcal{N},$$

其中 $x_i(t)$ 是第 i 个节点的状态变量, \mathcal{N} 为节点集, $u_i(t)$ 是第 i 个节点的分布采样控制输入,形式如下:

$$u_i(t) = \alpha \sum_{j \in N_i} g_{ij} C(x_j(t_k) - x_i(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

g_{ij} 为第 j 个节点与第 i 个节点间的耦合控制力, $\{t_k\}$ 是采样时间序列, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示内耦合矩阵, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 是耦合力, \mathbb{N} 为非负整数集, N_i 为所有与第 i 个节点相邻的节点构成的节点子集.

但是在实际的应用当中,很多系统模型都不是线性的.所以,文献[11]所考虑的模型在实际应用中具有一定的局限性.为此,文献[12]考虑了如下形式的多智能体网络:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(x_i(t)) + u_i(t), i \in \mathcal{N},$$

其中 $x_i(t)$ 是第 i 个节点的状态变量, $f(x_i(t))$ 为连续的非线性向量函数, $u_i(t)$ 是第 i 个节点的控制输入,且其形式为式(1)所示.显然,相比文献[11],文献[12]所考虑的模型更具广泛性. Wu 等^[14]考虑了如下具有耦合时变时滞的 CDNs:

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + c \sum_{j=1}^N G_{ij} Ax_j(t - \tau(t)) + u_i(t), i \in \mathcal{N},$$

其中 $x_i(t)$ 是第 i 个节点的状态变量, $f(x_i(t))$ 为连续的非线性向量函数, G_{ij} 表示为第 j 个节点与第 i 个节点的耦合控制力, $c \in \mathbb{R}^+$ 是耦合力, $u_i(t)$ 为控制输入.但该文献所考虑的分散采样控制器为

$$u_i(t) = K_i(x_i(t_k) - s(t)), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N},$$

其中 $s(t) \in \mathbb{R}^n$ 是孤立节点 $\dot{s}(t) = f(s(t))$ 的状态轨线, K_i 是状态反馈控制器的增益矩阵.分散采样控制策略忽略了其相邻节点的状态信息,所以不适合于具有强耦合力的 CDNs,更适合于弱耦合力的 CDNs.而在文献[11]和文献[12]中没有考虑到分布采样控制器的设计问题.【本研究切入点】在实际应用中,控制器设计的优劣直接影响到受控系统的应能.因此,对具有耦合时变时滞的 CDNs,如何设计优化分布采样同步控制器,仍然是亟待解决的问题.【拟解决的关键问题】针对具有耦合时变时滞 CDNs,研究具有最小耦合力的分布采样同步控制器的设计问题.基于时间依赖的 Lyapunov 函数的方法和凸组合技术,运用 Jensen 不等式处理积分项,建立同步误差系统指数

稳定性的判据,在此基础上,给出迭代算法,用来设计具有最小耦合力的分布采样同步控制器。

1 问题描述

考虑具有 N 个线性时滞耦合 CDNs,每个节点是一个 n 维动态系统,其状态方程如下:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma x_j(t - \tau(t)) + u_i(t), i \in \mathcal{N}, \quad (2)$$

其中 N 是节点个数, $x_i(t) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ 是第 i 个节点的状态, $u_i(t)$ 是第 i 个节点的控制输入, $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一个连续的向量函数,满足 $f(t, 0) = 0$, $\tau(t)$ 是时变耦合时滞. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为已知的常系数矩阵, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为内耦合矩阵, $B \triangleq (b_{ij})_{N \times N}$ 是耦合配置矩阵且满足耦合条件: $b_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}$, 当 $i \neq j$ 时, $b_{ij} > 0, \forall i, j \in \mathcal{N}$. 如果第 i 个节点与第 j 个节点相耦合, 则 $b_{ij} > 0, i \neq j$, 否则, $b_{ij} = 0$. 另外, 对于非线性向量函数 $f(t, x)$ 与时变耦合时滞 $\tau(t)$, 分别满足如下假设:

(H1) 存在具有合适维数的矩阵 L 使得下列不等式成立:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|L(x - y)\|, \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(H2) 存在标量 $\tau > 0$ 和 $\delta < 1$, 使得时变耦合时滞 $\tau(t)$ 满足 $0 \leq \tau(t) \leq \tau, \dot{\tau}(t) \leq \delta$.

考虑如下形式的分布采样同步控制器:

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \nu_{ij} \Gamma (x_j(t_k) - x_i(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

其中 ν_{ij} 是第 j 个节点与第 i 个节点的耦合力, $\{t_k, k \in \mathbb{N}\} \in S(h)$ 是采样时间序列, 这里 $S(h) = \{\{t_k\}; 0 < t_{k+1} - t_k \leq h, k \in \mathbb{N}\}$, h 表示采样区间的上界.

注 1 式(3)所考虑的分布采样同步控制器不求采样区间是周期的, 相比于周期采样同步控制器, 变周期采样同步控制器具有更大的灵活性和鲁棒性.

将(3)代入到(2), 得到闭环系统:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma x_j(t - \tau(t)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \nu_{ij} \Gamma (x_j(t_k) - x_i(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

定义 $\nu_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \nu_{ij}$, 如果 $j \notin \mathcal{N}_i, j \neq i$, 则 $\nu_{ij} = 0$. 令 $\Delta = (\nu_{ij})_{N \times N}$. 根据 Kronecker 积的性质, 采样受控 CDNs(4)可以改写为

$$\dot{x}(t) = (I_N \otimes A)x(t) + f(t, x(t)) + (B \otimes \Gamma)x(t - \tau(t)) + (\Delta \otimes \Gamma)x(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

其中 $x = \text{col}(x_1, \dots, x_N), f(t, x) = \text{col}(f(t, x_1), \dots, f(t, x_N))$.

定义同步误差为 $e_i(t) = x_i(t) - x_{i+1}(t), i \in \mathcal{N} - \{N\}$. 令 $e = \text{col}(e_1, e_2, \dots, e_{N-1})$, 易得到下列等式:

$$GM = I_{N-1}, B = BMG, \Delta = \Delta MG, (G \otimes I_N)x = e, \quad (6)$$

且有

$$\begin{aligned} (G \otimes I_N)(I_N \otimes A) &= G \otimes A = \\ (I_{N-1} \otimes A)(G \otimes I_N) & \\ (G \otimes I_n)(B \otimes \Gamma) &= GB \otimes \Gamma = (GBMG) \otimes \Gamma = \\ ((GBM) \otimes \Gamma)(G \otimes I_n) & \\ (G \otimes I_n)(\Delta \otimes \Gamma) &= (G\Delta) \otimes \Gamma = \\ (G\Delta MG) \otimes \Gamma &= (G\Delta M) \otimes \Gamma (G \otimes I_n), \end{aligned}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}.$$

对式(5)左乘 $G \otimes I_n$, 通过式(6)可以得到同步误差系统:

$$\dot{e}(t) = (I_{N-1} \otimes A)e(t) + \bar{f}(t, x(t)) + (GBM \otimes \Gamma)e(t - \tau(t)) + (G\Delta M \otimes \Gamma)e(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

其中 $\bar{f}(t, x(t)) = \text{col}(f(t, x_1) - f(t, x_2), \dots, f(t, x_{N-1}) - f(t, x_N))$.

对于给定的采样时间序列 $S(h)$, 引入如下分段函数:

$$\rho_1(t) = t - t_k, \rho_2(t) = t_{k+1} - t, t \in [t_k, t_{k+1}).$$

则对于采样时间序列 $\{t_k, k \in \mathbb{N}\} \in S(h)$, 如下不等式成立:

$$0 < \rho_1(t) + \rho_2(t) \leq h, 0 \leq \rho_1(t) \leq h. \quad (8)$$

根据上面所引入的分段函数, 误差动态系统(7)改写为如下变时滞系统形式:

$$\dot{e}(t) = (I_{N-1} \otimes A)e(t) + \bar{f}(t, x(t)) + (GBM \otimes \Gamma)e(t - \tau(t)) + (G\Delta M \otimes \Gamma)e(t - \rho_1(t)), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

注 2 在同步误差系统(9)中,把 $(t - t_k)$ 看作是系统的一个时变时滞 $\rho_1(t)$, 其上界为 h , 导数满足 $\dot{\rho}_1(t) = 1$.

下面给出本文所需的定义与引理.

定义 1 设 $e(t, t_0, \phi)$ 是系统(9)过 (t_0, ϕ) 的解. 给定一类采样时间序列 $S(h)$, 如果存在正标量 c 和 K , 对任意的初始条件和 $\{t_k\} \in S(h)$, 下列不等式成立:

$$\|e(t, t_0, \phi)\| \leq Ke^{-c(t-t_0)} \|\phi\|, t > 0.$$

则称系统(9)的零解关于 $S(h)$ 是一致全局指数稳定 (UGES) 的.

引理 1(文献[15]) 给定标量 a, b 满足 $b > 0$, $a > -2\sqrt{b}$. 令标量 $c = \frac{1}{2}\sqrt{|4b - a^2|}$. 定义函数 ν 具有如下形式:

$$\nu = \nu(a, b) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{c} \arctan h \frac{2c}{a}, & a > 2\sqrt{b}; \\ \frac{2}{a}, & a = 2\sqrt{b}; \\ \frac{1}{c} \arctan \frac{2c}{a}, & 0 < a < 2\sqrt{b}; \\ \frac{\pi}{2c}, & -2\sqrt{b} < a \leq 0. \end{cases}$$

令 α, T 和 σ 为正常数, $\varepsilon \in (0, T]$, $\Psi(t, \Psi_0)$ 为如下初值问题的解:

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -\frac{\nu}{\varepsilon + \sigma}(\Psi^2 + a\Psi + b), t \geq \alpha, \\ \Psi(\alpha) = \Psi_0 > 0 \end{cases}, \quad (10)$$

则存在一个仅依赖 α, T, a, b 的正常数 ρ 和初值 $\Psi^* \in (0, \rho)$, 使得系统(10)的解 $\Psi(t) = (t, \Psi_0^*)$ 具有如下性质:

$$\Psi(\alpha + \varepsilon) = 0, \dot{\Psi}(t) < 0, t \in [\alpha, \alpha + \varepsilon].$$

引理 2(文献[16]) (Jensen 不等式) 对任意给定的正定矩阵 Q 和参数 γ_1, γ_2 , 其中 γ_1, γ_2 满足 $\gamma_1 < \gamma_2$. 若存在向量函数 $x: [\gamma_1, \gamma_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得下面的积分有意义, 则积分不等式成立:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} x^T(s) Q x(s) ds \geq \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} x^T(s) ds \right) Q \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} x(s) ds \right).$$

引理 3(文献[17]) 对任意矩阵 $\begin{bmatrix} M_1 & S \\ * & M_2 \end{bmatrix} \geq 0$, 标量 $\tau > 0$, 如果存在 $\tau(t)$ 满足 $0 \leq \tau(t) \leq \tau$, 且向量函数 $\dot{e}(\cdot): [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得下面的积分有意义, 则积分不等式成立:

$$-\tau \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) M_1 e(s) ds -$$

$$\tau \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{e}^T(s) M_2 e(s) ds \leq \eta^T(t) \Lambda \eta(t),$$

其中 $\eta^T(t) = (e^T(t), e^T(t - \tau(t)), e^T(t - \tau))$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -M_1 & M_1 - S & S \\ * & -M_1 - M_2 + S + S^T & M_2 - S \\ * & * & -M_2 \end{bmatrix}.$$

2 稳定性分析

为了捕捉采样对同步误差系统(7)的动力学行为的影响, 构造与采样时间序列相关的时间依赖的 Lyapunov 函数来分析同步误差系统(7)的稳定性.

根据引理 1 可知, 对于给定的采样时间序列 $\{t_k\} \in S(h)$, 任意给定的标量 a, b 满足 $b > 0, a > -2\sqrt{b}$ 和任意给定的正标量 ε_1 , 存在仅依赖于 a, b, h, ε_1 的标量 $\rho > 0$, 使得初值 $\Psi_{0k} \in (0, \rho)$, $\Psi_k(t) = \Psi_k(t, \Psi_{0k})$ 是满足如下初值问题的唯一解:

$$\begin{cases} \dot{\Psi} = -\frac{\nu}{\varepsilon_1 + h_k}(\Psi^2 + a\Psi + b), t \geq t_k, \\ \Psi(t_k) = \phi_{0k} > 0 \end{cases},$$

其中 h_k 表示为第 k 个采区间的上界, $k \in \mathbb{N}$. 则 Ψ_k 具有以下性质:

$$\Psi_k(t_{k+1}) = 0, \dot{\Psi}_k(t) < 0, t \in [t_k, t_{k+1}]. \quad (11)$$

定义分段可微函数 $\Psi: [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ 满足:

$$\Psi(t) = \Psi_k(t), \Psi(t_k) \triangleq \Psi(t_k^+) = \Psi_k(t_k), t \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

根据式(11)和式(12)可得

$$\Psi(t_k^-) = 0, 0 \leq \Psi(t) \leq \rho, t \geq t_0, k \in \mathbb{N},$$

$$\dot{\Psi} \leq -\frac{\nu}{h + \varepsilon_1}(\Psi^2 + a\Psi + b) < 0, t \neq t_k, k \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

构造时间依赖的 Lyapunov 函数:

$$V(t) \triangleq V(t, e(t)) = \sum_{i=1}^8 V_i(t, e(t)), \quad (14)$$

$V_i(t, e(t))$ 分别表示如下:

$$V_1(t, e(t)) = e^T(t) P_1 e(t),$$

$$V_2(t, e(t)) = \rho_2(t) [\tilde{e}^T(t) P_2 \tilde{e}(t) + 2(e(t) - \tilde{e}(t))^T P_3 \tilde{e}(t)],$$

$$V_3(t, e(t)) = \Psi(t) \tilde{e}^T(t) [\rho_2(t) P_4 + (h - \rho_2(t)) P_5] \tilde{e}(t),$$

$$V_4(t, e(t)) = \rho_2(t) \int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_1 \dot{e}(s) ds,$$

$$V_5(t, e(t)) = \int_{t-\tau(t)}^t e^T(s) Q_2 e(s) ds,$$

$$V_6(t, e(t)) = \int_{t-\tau}^t e^T(s) Q_3 e(s) ds,$$

$$V_7(t, e(t)) = \tau \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s) Q_4 \dot{e}(s) ds d\theta,$$

$$V_8(t, e(t)) = \tau \int_{-\tau(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{e}^T(s) Q_5 \dot{e}(s) ds d\theta,$$

其中 $\bar{e}(t) = e(t) - e(t - \rho_1(t))$, 矩阵 $P_1 > 0, P_4 > 0, P_5 > 0, Q_i > 0, i = 1, \dots, 5, P_2^T = P_2$.

注 3 由于 $\Psi(t), \rho_1(t), \rho_2(t)$ 在 (t_k, t_{k+1}) 内是连续的, 所以本文所构造的时间依赖的 Lyapunov 函数 $V(t)$ 在 $[t_0 - \tau, +\infty)$ 连续, 且在 $\bigcup_{k=0}^{\infty} (t_k, t_{k+1})$ 上可微.

根据式(14)所构造的时间依赖的 Lyapunov 函数来分析同步误差系统(9)的稳定性. 为了表述方便, 引入以下符号:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= [\mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 5n(N-1)}], \\ \mathcal{J}_2 &= [\mathbf{0}_{n(N-1)}, \mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 4n(N-1)}], \\ \mathcal{J}_3 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)}, \mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 3n(N-1)}], \\ \mathcal{J}_4 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 3n(N-1)}, \mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)}], \\ \mathcal{J}_5 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 4n(N-1)}, \mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}], \\ \mathcal{J}_6 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 5n(N-1)}, \mathbf{I}_{n(N-1)}], \\ \mathcal{J}_{13} &= [\mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}, -\mathbf{I}_{n(N-1)}, \\ &\mathbf{0}_{n(N-1) \times 3n(N-1)}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= [(\mathbf{I}_{n(N-1)} \otimes \mathbf{A}), -\mathbf{I}_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}, \\ &(\mathbf{GBM} \otimes \Gamma), \mathbf{0}_{n(N-1)}, \mathbf{I}_{n(N-1)}], \\ \xi^T(t) &= [e^T(t), \dot{e}^T(t), \bar{e}^T(t), e^T(t - \tau(t)), e^T(t - \tau), \\ &\bar{f}^T(t, x(t))]. \end{aligned}$$

可以得到下面的式子:

$$e(t) = \mathcal{J}_1 \xi(t), \dot{e}(t) = \mathcal{J}_2 \xi(t), \bar{e}(t) = \mathcal{J}_3 \xi(t), e(t - \tau(t)) = \mathcal{J}_4 \xi(t),$$

$$e(t - \tau) = \mathcal{J}_5 \xi(t), \bar{f}^T(t, x(t)) = \mathcal{J}_6 \xi(t), e(t - \rho_1(t)) = \mathcal{J}_{13} \xi(t).$$

定理 1 考虑同步误差系统(9), 假设(H1)和(H2)成立. 给定 $N \times N$ 维增益矩阵 Δ , 采样时间序列 $S(h)$, 若存在标量 $\beta_j > 0, j = 1, 2$, 和标量 a, b 满足 $b > 0, a > -2\sqrt{b}, n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 $P_1 > 0, P_4 > 0, P_5 > 0, Q_i > 0, P_2^T = P_2, P_3, S, F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, i = 1, \dots, 5$, 和 $6n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 M_1 , 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} Q_1 + (1-\delta)Q_5 & S \\ * & Q_4 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & h P_3 \\ * & Q_1 + h(P_2 - P_3 - P_3^T) \end{bmatrix} > 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + \Omega_2 & \Omega_{12} \\ * & -\nu P_4 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + \Omega_3 & \Omega_{22} & h M_1 \\ * & -\nu P_5 & 0 \\ * & * & -h Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \mathcal{J}_1^T [Q_2 + Q_3 - Q_4 - (1-\delta)Q_5] \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_4^T [(1-\delta)(Q_2 + Q_5) + 2Q_4 - S - S^T] \mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_5^T (Q_3 + Q_4) \mathcal{J}_5 + \\ &\tau^2 \mathcal{J}_2^T [Q_4 + Q_5] \mathcal{J}_2 + M_1 \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_3^T M_1 - \mathcal{J}_3^T P_2 \mathcal{J}_3 - \\ &\mathcal{J}_{13}^T P_3 \mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_3^T P_3 \mathcal{J}_{13} + \mathcal{J}_1^T [Q_4 + (1-\delta)Q_5 - S] \mathcal{J}_4 + \\ &\mathcal{J}_4^T [Q_4 + (1-\delta)Q_5 - S]^T \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_1^T S \mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_5^T S \mathcal{J}_1 + \\ &\mathcal{J}_4^T (Q_4 - S) \mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_5^T (Q_4 - S)^T \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_1^T P_1 \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_2^T P_1 \mathcal{J}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \beta_1 [\mathcal{J}_1^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (L^T L)) \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_6^T \mathcal{J}_6] + F_1 [\mathcal{A} + \\ &((G\Delta M) \otimes \Gamma) \mathcal{J}_{13}] - b\nu \mathcal{J}_3^T P_4 \mathcal{J}_3 + [\mathcal{A} + \\ &((G\Delta M) \otimes \Gamma) \mathcal{J}_{13}]^T F_1^T + h[\mathcal{J}_2^T Q_1 \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3^T P_2 \mathcal{J}_2 + \\ &\mathcal{J}_2^T P_2 \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_{13}^T P_3 \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_2^T P_3 \mathcal{J}_{13}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \beta_2 [\mathcal{J}_1^T (\mathbf{I}_{N-1} \otimes (L^T L)) \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_6^T \mathcal{J}_6] + F_2 [\mathcal{A} + \\ &((G\Delta M) \otimes \Gamma) \mathcal{J}_{13}] - b\nu \mathcal{J}_3^T P_5 \mathcal{J}_3 + [\mathcal{A} + \\ &((G\Delta M) \otimes \Gamma) \mathcal{J}_{13}]^T F_2^T, \end{aligned}$$

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2} \mathcal{J}_3^T (P_5 - P_4) + (h \mathcal{J}_2^T - \frac{a\nu}{2} \mathcal{J}_3^T) P_4,$$

$$\Omega_{22} = \frac{1}{2} \mathcal{J}_3^T (P_5 - P_4) + (h \mathcal{J}_2^T - \frac{a\nu}{2} \mathcal{J}_3^T) P_5,$$

$$F_1 = (F_{11}, F_{12}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 4n(N-1)})^T, F_2 = (F_{21}, F_{22}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 4n(N-1)})^T.$$

则同步误差系统(9)关于 $S(h)$ 为 UGES.

证明 从式(16)可知, 存在充分小的正标量 $c_0 > 0$, 使得 $V(t) \geq c_0 \|e(t)\|^2$. 根据所定义的时间依赖的 Lyapunov 函数(14)可知:

$$\begin{aligned} V(t) &\geq e^T(t) P_1 e(t) + \rho_2(t) [\bar{e}^T(t) P_2 \bar{e}(t) + \\ &2(e(t) - \bar{e}(t)) P_3 \bar{e}(t)] + \rho_2(t) \int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_1 \dot{e}(s) ds. \end{aligned} \quad (18)$$

又根据引理 2 和式(8)可得下式成立,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \bar{e}^T(t) Q_1 \bar{e}(t) &\leq \frac{1}{\rho_1(t)} \bar{e}^T(t) Q_1 \bar{e}(t) \leq \\ &\int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_1 \dot{e}(s) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

把式(19)代入式(18)中有

$$\begin{aligned} V(t) &\geq \\ &\begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & \rho_2(t) P_3 \\ * & \rho_2(t) [\frac{1}{h} Q_1 + P_2 - P_3 - P_3^T] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}^T \left(\frac{h - \rho_2(t)}{h} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho_2(t)}{h} \begin{bmatrix} P_1 & h P_3 \\ * & Q_1 + h[P_2 - P_3 - P_3^T] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e(t) \\ \bar{e}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

所以根据(16)可得:

$$V(t) \geq \frac{h - \rho_2(t)}{h} e^T(t) P_1 e(t).$$

又因为 $P_1 > 0$, 所以存在充分小的正标量 $c_0 > 0$, 使得 $V(t) \geq c_0 \|e(t)\|^2$.

又根据矩阵不等式(17)可知, 存在充分小的正标量 ε_1 , 并令 $\bar{h} = h + \varepsilon_1$, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + \Omega'_2 & \Omega'_{12} \\ * & -\nu \frac{h}{h} P_4 \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + \Omega'_3 & \Omega'_{22} & h M_1 \\ * & -\nu \frac{h}{h} P_5 & 0 \\ * & * & -h Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

其中

$$\Omega'_2 = \Omega_2 + (1 - \frac{h}{h}) b v \mathcal{J}_3^T P_4 \mathcal{J}_3, \Omega'_3 = \Omega_3 +$$

$$(1 - \frac{h}{h}) b v \mathcal{J}_3^T P_5 \mathcal{J}_3,$$

$$\Omega'_{12} = \Omega_{12} + (1 - \frac{h}{h}) \frac{a v}{2} \mathcal{J}_3^T P_4, \Omega'_{22} = \Omega_{22} + (1 -$$

$$\frac{h}{h}) \frac{a v}{2} \mathcal{J}_3^T P_5,$$

令

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \frac{1}{2} \mathcal{J}_3^T (P_5 - P_4) \\ * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \Omega'_2 & (\mathcal{J}_2^T - \frac{a v}{h} \mathcal{J}_3^T) P_4 \\ * & -\frac{\nu}{h} P_4 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}'_3 & (\mathcal{J}_2^T - \frac{a v}{2h} \mathcal{J}_3^T) P_5 \\ * & -\frac{\nu}{h} P_5 \end{bmatrix},$$

$$\beta(t) = \frac{\rho_2(t)}{h} \beta_1 + \frac{h - \rho_2(t)}{h} \beta_2, F(t) = \frac{\rho_2(t)}{h} F_1 +$$

$$\frac{h - \rho_2(t)}{h} F_2,$$

$$\text{其中 } \bar{\Omega}'_3 = \frac{1}{h} \Omega'_3 + M_1 Q_1^{-1} M_1^T.$$

所以, 根据 Schur 补引理可知, 式(21)和式(22)分别等价于下列两个矩阵不等式:

$$\Xi_1 + h \Xi_2 < 0, \Xi_1 + h \Xi_3 < 0. \quad (23)$$

对 $V_i(t, e(t))$ 在 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 上沿误差系统(9)的轨线求导可得

$$D^+ V_1(t, e(t)) = 2 e^T(t) P_1 \dot{e}(t),$$

$$D^+ V_2(t, e(t)) = -\bar{e}^T(t) P_2 \bar{e}(t) - 2(e(t) - \bar{e}(t)) P_3 \bar{e}(t) + \rho_2(t) [2\bar{e}^T(t) P_2 \dot{e}(t) + 2(e(t) - \bar{e}(t)) P_3 \dot{e}(t)],$$

$$D^+ V_3(t, e(t)) = \dot{\Psi}(t) \bar{e}^T(t) [\rho_2(t) P_4 + (h -$$

$$\rho_2(t)) P_5] \bar{e}(t) + 2\Psi(t) \bar{e}^T(t) [\rho_2(t) P_4 + (h - \rho_2(t)) P_5] \dot{e}(t) + \Psi(t) \bar{e}^T(t) [P_5 - P_4] \bar{e}(t),$$

$$D^+ V_4(t, e(t)) = \rho_2(t) \dot{e}^T(t) Q_1 \dot{e}(t) -$$

$$\int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_1 \dot{e}(s) ds,$$

$$D^+ V_5(t, e(t)) = e^T(t) Q_2 e^T(t) - (1 -$$

$$\tau(t)) e^T(t - \tau(t)) Q_2 e(t - \tau(t)),$$

$$D^+ V_6(t, e(t)) = e^T(t) Q_3 e^T(t) - e^T(t -$$

$$\tau) Q_3 e(t - \tau),$$

$$D^+ V_7(t, e(t)) = \tau^2 \dot{e}^T(t) Q_4 \dot{e}(t) -$$

$$\tau \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s) Q_4 \dot{e}(s) ds,$$

$$D^+ V_8(t, e(t)) = \tau \tau(t) e^T(t) Q_5 e^T(t) - \tau(t -$$

$$\tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_5 \dot{e}(s) ds \leq \tau^2 \dot{e}^T(t) Q_5 \dot{e}(t) - \tau(1 -$$

$$\delta) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_5 \dot{e}(s) ds. \quad (24)$$

注意到

$$\bar{e}(t) = \int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}(s) ds,$$

根据引理 2 和式(8)可知, 存在矩阵 $M_1 \in \mathbb{R}^{6n(N-1) \times n(N-1)}$, 使得下式成立:

$$0 = 2 \xi^T(t) M_1 [\bar{e}(t) - \int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}(s) ds] \leq$$

$$2 \xi^T(t) M_1 \bar{e}(t) + (h - \rho_2(t)) \xi^T(t) M_1 Q_1 M_1^T \xi(t) + \int_{t-\rho_1(t)}^t \dot{e}^T(s) Q_1 \dot{e}(s) ds. \quad (25)$$

又由式(15)成立可知, 通过引理 3, 有

$$-\tau \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s) Q_4 \dot{e}(s) ds - \tau(1 -$$

$$\delta) \int_{t-\tau}^t \dot{e}^T(s) Q_5 \dot{e}(s) ds = -\tau \int_{t-\tau(t)}^t \dot{e}^T(s) [Q_4 + (1 -$$

$$\delta) Q_5] \dot{e}(s) ds - \tau \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{e}^T(s) Q_4 \dot{e}(s) ds \leq \eta^T(t) \Lambda_1 \eta(t) =$$

$$\xi^T(t) \{-\mathcal{J}_1^T [Q_4 + (1 - \delta) Q_5] \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_4^T [Q_4 + (1 -$$

$$\delta) Q_5 - S\}^T \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_1^T [Q_4 + (1 - \delta) Q_5 - S] \mathcal{J}_4 +$$

$$\mathcal{J}_5^T S^T \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_1^T S \mathcal{J}_5 + \mathcal{J}_5^T (Q_4 - S)^T \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_4^T (Q_4 - S)^T \mathcal{J}_5 +$$

$$\mathcal{J}_4^T [-(1 - \delta) Q_5 - 2Q_4 + S + S^T] \mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_5^T Q_4 \mathcal{J}_5 \} \xi(t), \quad (26)$$

其中

$$\eta^T(t) = (e^T(t), e^T(t - \tau(t)), e^T(t - \tau)),$$

$$\Lambda_1 =$$

$$\begin{bmatrix} -[Q_4 + (1 - \delta) Q_5] & Q_4 + (1 - \delta) Q_5 - S & S \\ * & -2Q_4 - (1 - \delta) Q_5 + S + S^T & Q_4 - S \\ * & * & -Q_4 \end{bmatrix}.$$

根据同步误差系统(9)可知, 存在矩阵 $F(t) \in \mathbb{R}^{6n(N-1) \times n(N-1)}$ 使得下式恒成立:

$$0 = 2 \xi^T(t) F(t) [(I_{N-1} \otimes A) e(t) - \dot{e}(t) + \bar{f}(t, x(t)) + ((GBM) \otimes \Gamma) e(t - \tau(t)) + ((G\Delta M) \otimes \Gamma) e(t - \rho_1(t))],$$

根据所引入的符号, 上式可以写为如下形式:

$$0 = \xi^T(t) \{ F(t) [\mathcal{A} + ((G\Delta M) \otimes \Gamma) \mathcal{J}_{13}] + [\mathcal{A} + ((G\Delta M) \otimes \Gamma) \mathcal{J}_{13}]^T F^T(t) \} \xi(t). \quad (27)$$

又由假设(H1)可知, 存在标量 $\beta(t) > 0$, 使得下面的不等式恒成立:

$$0 \leq \beta(t) [e^T(t) (I_{N-1} \otimes (L^T L)) e(t) - \bar{f}^T(t, x(t)) \bar{f}(t, x(t))]. \quad (28)$$

把式(25)~(28)代入式(24), 并根据假设(H2)可得

$$D^+ V(t) \leq \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \Psi(t) \bar{e}(t) \end{bmatrix}^T [\Xi_1 + \rho_2(t) \Xi_2 + (h - \rho_2(t)) \Xi_3] \cdot \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \Psi(t) \bar{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \Psi(t) \bar{e}(t) \end{bmatrix}^T \left[\frac{\rho_2(t)}{h} [\Xi_1 + h \Xi_2] + \frac{h - \rho_2(t)}{h} [\Xi_1 + h \Xi_3] \right] \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \Psi(t) \bar{e}(t) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

通过式(23)可得 $D^+ V(t) < 0$. 即, 存在一个充分小的 $\gamma > 0$ 使得

$$D^+ V(t) \leq -\gamma \xi^T(t) \xi(t), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

现在考虑 $V(t)$ 在采样时刻 $t_k, k \in \mathbb{N}$ 的取值. 注意到 $\rho_1(t_k) = \rho_2(t_k^-) = \Psi(t_k^-) = 0$, 且 $\bar{e}(t_k) = 0$. 所以有

$$V(t_k) = V_1(t_k) + V_5(t_k) + V_6(t_k) + V_7(t_k) + V_8(t_k) = V_1(t_k^-) + V_5(t_k^-) + V_6(t_k^-) + V_7(t_k^-) + V_8(t_k^-) = V(t_k^-). \quad (31)$$

$\rho_2(t)$ 和 $\Psi(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上有界, Lyapunov 函数 $V(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上连续. 所以, 存在正标量 c_1, c_2 , 使得下式成立:

$$V(t) \leq c_1 \|\xi(t)\|^2 + c_2 \int_{t-\bar{\tau}}^t \|\xi(s)\|^2 ds,$$

其中 $\bar{\tau} = \max\{\tau, h\}$.

又从式(16)可知, 存在充分小的正标量 $c_0 > 0$, 使得 $V(t) \geq c_0 \|e(t)\|^2$. 则有

$$c_0 \|e(t)\|^2 \leq V(t) \leq c_1 \|\xi(t)\|^2 + c_2 \int_{t-\bar{\tau}}^t \|\xi(s)\|^2 ds. \quad (32)$$

选取 $c > 0$, 使得下式成立:

$$0 < \gamma - c(c_1 + c_2 \bar{\tau} e^{c\bar{\tau}}). \quad (33)$$

通过式(30)和式(32), 可以推得下式成立:

$$D^+ (e^{ct} V(t)) = e^{ct} (cV(t) + D^+ V(t)) \leq e^{ct} [(cc_1 - \gamma) \|\xi(t)\|^2 + cc_2 \int_{t-\bar{\tau}}^t \|\xi(s)\|^2 ds], \quad (34)$$

对上式两边从 t_0 到 t 求积分有

$$\int_{t_0}^t D^+ (e^{cs} V(s)) ds \leq (cc_1 - \gamma) \int_{t_0}^t e^{cs} \|\xi(s)\|^2 ds + cc_2 \int_{t_0}^t \int_{s-\bar{\tau}}^s e^{cs} \|\xi(\theta)\|^2 d\theta ds, \quad (35)$$

注意到

$$\int_{t_0}^t \int_{s-\bar{\tau}}^s e^{cs} \|\xi(\theta)\|^2 d\theta ds \leq e^{c\bar{\tau}} \int_{t_0-\bar{\tau}}^t \int_s^{s+\bar{\tau}} e^{cs} \|\xi(\theta)\|^2 d\theta ds \leq \bar{\tau} e^{c\bar{\tau}} \left(\int_{t_0-\bar{\tau}}^t e^{cs} \|\xi(\theta)\|^2 ds + \int_{t_0}^t e^{cs} \|\xi(\theta)\|^2 ds \right) \leq \bar{\tau}^2 e^{c(t_0+\bar{\tau})} \|\phi\|_{\bar{\tau}}^2 + \bar{\tau} e^{c\bar{\tau}} \int_{t_0}^t e^{cs} \|\xi(\theta)\|^2 ds. \quad (36)$$

结合式(35)和式(36), 可得

$$e^{ct} V(t) \leq e^{ct_0} V(t_0) + cc_2 \bar{\tau}^2 e^{c(t_0+\bar{\tau})} \|\phi\|_{\bar{\tau}}^2 + (cc_1 + cc_2 \bar{\tau} e^{c\bar{\tau}}) \int_{t_0}^t e^{cs} \|\xi(s)\|^2 ds.$$

又易知

$$V(t_0) \leq c_1 \|\xi(t_0)\|^2 + c_2 \int_{t_0-\bar{\tau}}^{t_0} \|\xi(s)\|^2 ds \leq (c_1 + c_2 \bar{\tau}) \|\phi\|_{\bar{\tau}}^2, \quad (37)$$

通过式(33)和式(37), 有

$$e^{ct} V(t) \leq (c_1 + c_2 \bar{\tau} + cc_2 \bar{\tau} e^{c\bar{\tau}}) \|\phi\|_{\bar{\tau}}^2 e^{ct_0},$$

则有

$$\|e(t)\| \leq K \|\phi\|_{\bar{\tau}} e^{-\frac{1}{2}c(t-t_0)}, \forall t > t_0,$$

$$\text{其中 } K = \sqrt{\frac{c_1 + c_2 \bar{\tau} + cc_2 \bar{\tau} e^{c\bar{\tau}}}{c_0}}.$$

因此, 同步误差系统(9)的零解关于 $S(h)$ 为 UGES.

在文献[12]中, 考虑了没有耦合时滞的复杂动态网络, 其形式如下:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + f(t, x_i(t)) + \sum_{j \in N_i} \nu_{ij} \Gamma(x_j(t_k)) - x_i(t_k), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}. \quad (38)$$

根据本文所构造的时间依赖的 Lyapunov 函数, 定理 1 中的条件可以进行简化. 具体方法如下: 重新构造结构更为简单的时间依赖的 Lyapunov 函数:

$$V(t) \triangleq \bar{V}(t, e(t)) = \sum_{i=1}^4 V_i(t, e(t)), \quad (39)$$

其中 $V_i(t, e(t))$ 如式(14)中所定义. 则定理 1 可以简化为如下推论的形式:

推论 1 考虑 CDNs(38)满足(H1). 给定一个 $N \times N$ 维增益矩阵 Δ , 一类采样时间序列 $S(h)$. 若存在标量 $\beta_j > 0, j=1, 2$, 和标量 a, b 满足 $b > 0, a > -2\sqrt{b}, n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 $P_1 > 0, P_4 > 0$,

$P_5 > 0, Q_i > 0, P_2^T = P_2, P_3, F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, i = 1, \dots, 5$, 和 $4n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 \bar{M}_1 , 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2 & \bar{\Omega}_{12} \\ * & -\nu P_4 \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_3 & \bar{\Omega}_{22} & h \bar{M}_1 \\ * & -\nu P_5 & 0 \\ * & * & -h Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}_1 &= [I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 3n(N-1)}], \\ \bar{\mathcal{J}}_2 &= [\mathbf{0}_{n(N-1)}, I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)}], \\ \bar{\mathcal{J}}_3 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)}, I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}], \\ \bar{\mathcal{J}}_4 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 3n(N-1)}, I_{n(N-1)}], \\ \bar{\mathcal{J}}_{13} &= [I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}, -I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}], \\ \bar{\mathcal{A}} &= [(I_{(N-1)} \otimes A), -I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}, I_{n(N-1)}], \\ \bar{\Omega}_1 &= \bar{\mathcal{J}}_1^T P_1 \bar{\mathcal{J}}_2 + \bar{\mathcal{J}}_2^T P_1 \bar{\mathcal{J}}_1 + \bar{M}_1 \bar{\mathcal{J}}_3 + \bar{\mathcal{J}}_3^T \bar{M}_1 - \bar{\mathcal{J}}_3^T P_2 \bar{\mathcal{J}}_3 - \\ &\bar{\mathcal{J}}_{13}^T P_3 \bar{\mathcal{J}}_3 - \bar{\mathcal{J}}_3^T P_3 \bar{\mathcal{J}}_{13}, \\ \bar{\Omega}_2 &= \beta_1 [\bar{\mathcal{J}}_1^T (I_{N-1} \otimes (L^T L)) \bar{\mathcal{J}}_1 - \bar{\mathcal{J}}_4^T \bar{\mathcal{J}}_4] + \bar{F}_1 [\bar{\mathcal{A}} + \\ &((G \Delta M) \otimes \Gamma) \bar{\mathcal{J}}_{13}] - b \nu \bar{\mathcal{J}}_3^T P_4 \bar{\mathcal{J}}_3 + [\bar{\mathcal{A}} + \\ &((G \Delta M) \otimes \Gamma) \bar{\mathcal{J}}_{13}]^T \bar{F}_1^T + h [\bar{\mathcal{J}}_2^T Q_1 \bar{\mathcal{J}}_2 + \bar{\mathcal{J}}_3^T P_2 \bar{\mathcal{J}}_2 + \\ &\bar{\mathcal{J}}_2^T P_2 \bar{\mathcal{J}}_3 + \bar{\mathcal{J}}_{13}^T P_3 \bar{\mathcal{J}}_2 + \bar{\mathcal{J}}_2^T P_3 \bar{\mathcal{J}}_{13}], \\ \bar{\Omega}_3 &= \beta_2 [\bar{\mathcal{J}}_1^T (I_{N-1} \otimes (L^T L)) \bar{\mathcal{J}}_1 - \bar{\mathcal{J}}_4^T \bar{\mathcal{J}}_4] + \bar{F}_2 [\bar{\mathcal{A}} + \\ &((G \Delta M) \otimes \Gamma) \bar{\mathcal{J}}_{13}] - b \nu \bar{\mathcal{J}}_3^T P_5 \bar{\mathcal{J}}_3 + [\bar{\mathcal{A}} + \\ &((G \Delta M) \otimes \Gamma) \bar{\mathcal{J}}_{13}]^T \bar{F}_2^T, \\ \bar{\Omega}_{12} &= \frac{1}{2} \bar{\mathcal{J}}_3^T (P_5 - P_4) + (h \bar{\mathcal{J}}_2^T - \frac{a \nu}{2} \bar{\mathcal{J}}_3^T) P_4, \\ \bar{\Omega}_{22} &= \frac{1}{2} \bar{\mathcal{J}}_3^T (P_5 - P_4) + (h \bar{\mathcal{J}}_2^T - \frac{a \nu}{2} \bar{\mathcal{J}}_3^T) P_5, \\ \bar{F}_1 &= (F_{11}, F_{12}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)})^T, \bar{F}_2 = (F_{21}, F_{22}, \\ &\mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)})^T. \end{aligned}$$

则 CDNs(38)关于 $S(h)$ 是一致全局指数同步的.

当 $f=0$ 时, 系统(39)变为如下形式:

$$\dot{x}_i(t) = A x_i(t) + \sum_{j \in N_i} \nu_{ij} \Gamma(x_j(t_k) - x_i(t_k)), t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N. \quad (41)$$

根据所构造的时间依赖的 Lyapunov(39)函数, 可以得到如下推论:

推论 2 考虑 CDNs(41), 给定一个 $N \times N$ 维增益矩阵 Δ , 一类采样时间序列 $S(h)$. 若存在标量 $\beta_j > 0, j = 1, 2$, 和标量 a, b 满足 $b > 0, a > -2\sqrt{b}$, $n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 $P_1 > 0, P_4 > 0, P_5 >$

$0, Q_i > 0, P_2^T = P_2, P_3, F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, i = 1, \dots, 5$, 和 $3n(N-1) \times n(N-1)$ 维矩阵 \tilde{M}_1 , 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 & \tilde{\Omega}_{12} \\ * & -\nu P_4 \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_3 & \tilde{\Omega}_{22} & h \tilde{M}_1 \\ * & -\nu P_5 & 0 \\ * & * & -h Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_1 &= [I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)}], \\ \tilde{\mathcal{J}}_2 &= [\mathbf{0}_{n(N-1)}, I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}], \\ \tilde{\mathcal{J}}_3 &= [\mathbf{0}_{n(N-1) \times 2n(N-1)}, I_{n(N-1)}], \\ \tilde{\mathcal{J}}_{13} &= [I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}, -I_{n(N-1)}], \\ \tilde{\mathcal{A}} &= [(I_{(N-1)} \otimes A), -I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1)}], \\ \tilde{\Omega}_1 &= \tilde{M}_1 \tilde{\mathcal{J}}_3 + \tilde{\mathcal{J}}_3^T \tilde{M}_1 - \tilde{\mathcal{J}}_3^T P_2 \tilde{\mathcal{J}}_3 - \tilde{\mathcal{J}}_{13}^T P_3 \tilde{\mathcal{J}}_3 - \\ &\tilde{\mathcal{J}}_3^T P_3 \tilde{\mathcal{J}}_{13} + \tilde{\mathcal{J}}_1^T P_1 \tilde{\mathcal{J}}_2 + \tilde{\mathcal{J}}_2^T P_1 \tilde{\mathcal{J}}_1, \\ \tilde{\Omega}_2 &= \tilde{F}_1 [\tilde{\mathcal{A}} + ((GVM) \otimes \Gamma) \tilde{\mathcal{J}}_{13}] + [\tilde{\mathcal{A}} + \\ &((GVM) \otimes \Gamma) \tilde{\mathcal{J}}_{13}]^T \tilde{F}_1^T - b \nu \tilde{\mathcal{J}}_3^T P_4 \tilde{\mathcal{J}}_3 + h [\tilde{\mathcal{J}}_2^T Q_1 \tilde{\mathcal{J}}_2 + \\ &\tilde{\mathcal{J}}_3^T P_2 \tilde{\mathcal{J}}_2 + \tilde{\mathcal{J}}_2^T P_2 \tilde{\mathcal{J}}_3 + \tilde{\mathcal{J}}_{13}^T P_3 \tilde{\mathcal{J}}_2 + \tilde{\mathcal{J}}_2^T P_3 \tilde{\mathcal{J}}_{13}], \\ \tilde{\Omega}_3 &= \tilde{F}_2 [\tilde{\mathcal{A}} + ((GVM) \otimes \Gamma) \tilde{\mathcal{J}}_{13}] + [\tilde{\mathcal{A}} + \\ &((GVM) \otimes \Gamma) \tilde{\mathcal{J}}_{13}]^T \tilde{F}_2^T - b \nu \tilde{\mathcal{J}}_3^T P_5 \tilde{\mathcal{J}}_3, \\ \tilde{\Omega}_{12} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{J}}_3^T (P_5 - P_4) + (h \tilde{\mathcal{J}}_2^T - \frac{a \nu}{2} \tilde{\mathcal{J}}_3^T) P_4, \\ \tilde{\Omega}_{22} &= \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{J}}_3^T (P_5 - P_4) + (h \tilde{\mathcal{J}}_2^T - \frac{a \nu}{2} \tilde{\mathcal{J}}_3^T) P_5, \\ \tilde{F}_1 &= (F_{11}, F_{12}, \mathbf{0}_{n(N-1)})^T, \tilde{F}_2 = (F_{21}, F_{22}, \\ &\mathbf{0}_{n(N-1)})^T, \end{aligned}$$

则 CDNs(41)关于 $S(h)$ 是一致全局指数同步的.

3 分布采样控制器的优化设计

在分布采样同步控制器(3)中, ν_{ij} 表示第 j 个节点与第 i 个节点的耦合控制力, $i, j \in N, \nu_{ij}$ 越小, 表示控制器消耗的能量越小. 因此, 有必要设计一个具有最小耦合力的分布采样同步控制器, 使得 $\sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}$ 取得最小值. 但是定理 1 中只给出了分布采样增益矩阵 Δ 所要满足的条件, 并没有指出如何选取合适的 ν_{ij} 使得 $\sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}$ 取得最小值. 下面, 通过定理 1 给出一个优化算法来设计次优的分布采样控制器, 使得其耦合力尽可能的小.

根据定理 1, 设计具有最小耦合力的分布采样同

步控制器问题可以转化为如下的优化问题:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij} \\ & \text{subject to (15) - (17)}. \end{aligned} \quad (43)$$

注意到 $(GM \otimes \Gamma) \mathcal{J}_3$ 不是线性的, 所以定理 1 中的条件(17)不是 LMI. 因此, (43) 的最优解不能通过凸优化算法来求解. 在此, 提出一个迭代算法来寻找优化问题(43)的次优值.

算法 1:

Step 1: 设 $k = 1$. 取 F_1, F_2 的初值 $F_1^0 = F_2^0 = [2I_{n(N-1)}, I_{n(N-1)}, \mathbf{0}_{n(N-1) \times 4n(N-1)}]^T$. 对于给定的标量 a, b , 满足引理 1, 对定理 1 中的变量 $(P_l, Q_p, \beta_q, \nu_{ij})$ 求解以下凸优化问题:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij} \\ & \text{subject to (15) - (17)}, \end{aligned} \quad (44)$$

令 $(P_l^f, Q_p^f, \beta_q^f, \nu_{ij}^f)$ 是优化问题(44) 满足 $\sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}^f$ 取到次优值的一个可行性解. 设 $\nu_0 = \sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}^f$, 且 $\nu_0 = \nu_1$.

Step 2: 取 $\nu_{ij} = \nu_{ij}^f$, 则分布采样增益矩阵 Δ 已知. 对变量 $(P_l, Q_p, \beta_q, F_1, F_2)$ 求解 LMIs (15) - (17). 令 $(P_l^f, Q_p^f, \beta_q^f, F_1^f, F_2^f)$ 是其一个可行性解.

Step 3: 取 $F_1 = F_1^f, F_2 = F_2^f$, 对变量 $(P_l, Q_p, \beta_q, \nu_{ij})$ 求解凸优化问题(44). 令 $(P_l^f, Q_p^f, \beta_q^f, \nu_{ij}^f)$ 是优化问题(44) 满足 $\sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}^f$ 取到次优值的一个可行性解. 设 $\nu_0 = \sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}^f$. 如果 $\nu_0 > \nu_1$ 或是算法满足迭代次数的要求了, 则算法终止. 否则, 设 $k = k + 1$, 继续返回到 Step 2.

Step 4: 对满足引理 1 的标量 a, b , 运用二维搜索, 可以求解出一个次优的 ν_0 .

注 4 对于推论 1, 可以得到类似的求解次优的分布采样同步控制器的算法, 只需将算法 1 中的约束条件(15)-(17)应相应地改为(16)和(40). 类似的, 将算法 1 中的约束条件(15)-(17)相应改为(16)和(42), 则可得到针对系统(41)的求解次优分布采样同步控制器的算法.

4 数值实例

例 1 考虑一个没有耦合时滞的 Chua's 电路, 则 CDNs(2)可以简化为如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} -\vartheta m_1 & \vartheta & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\varphi & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(t, x_i) = \begin{bmatrix} \frac{\vartheta(m_1 - m_0)}{2} (|x_{i1} + 1| - |x_{i1} - 1|) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$n = 3, i = 1, \dots, 4.$$

其中 $\vartheta = 9, \varphi = 14.286, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$. 容易看出 $f(t, x_i)$ 是满足假设 (H1) 的, 且 $L = [\vartheta(m_1 - m_0) \ 0 \ 0]$.

设分布采样控制器(3)的增益矩阵 Δ 的结构如下:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\nu_{14} & 0 & 0 & \nu_{14} \\ 0 & -\nu_{24} & 0 & \nu_{24} \\ 0 & \nu_{32} & -\nu_{32} & 0 \\ 0 & \nu_{42} & 0 & -\nu_{42} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

取 $a = 0.68, b = 1, \Gamma = I_3, F_1$ 和 F_2 的初值 $F_1^0 = F_2^0 = [2I_9 \ I_9 \ \mathbf{0}_9 \ I_9]^T$, 根据推论 1 可求得采样区间上界的最大值 $h = 0.0266$. 选取 $h = 0.026$, 其他的值如上所给出. 根据算法 1 可以求得分布采样控制器(3)的最小耦合力 $\nu_0 = \sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}$ 为 $\nu_0 = 17.3897$, 其中 ν_{ij} 的值分别为 $\nu_{14} = 4.7657, \nu_{24} = 2.1715, \nu_{32} = 4.1558, \nu_{42} = 6.2975$.

取初值

$$x(\theta) = (1, 0.5, 0.4, -1, -0.6, 0.5, 2, 0.5, -0.8, -1, -0.2, 0.3)^T, \theta \in [-1, 0]. \quad (47)$$

数值仿真清楚地表明, Chua's 电路的状态在没有采样控制下不能实现同步(图 1). 取 ν_{ij} 的值如式(46), 在初始条件(47)下, Chua's 电路的状态在分布采样控制下实现了全局一致同步(图 2~3).

为了与文献[11]和文献[12]的结果进行比较, 设系统矩阵 A , 内耦合矩阵 G 和分布采样耦合配置矩阵 Δ 分别为

$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta = 5 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

取 $a = 0.68, b = 1$, 通过推论 2 可求得采样区间上界的最大值 $h = 0.0427$. 然而在文献[11]中所允许采样区间的最大上界值 $h = 0.0249$, 文献[12]中采样区间的最大上界值 $h = 0.0341$. 显然, 本文所得到的结果比文献[11]和文献[12]中所得到的结果具有更少的保守性. 相比于文献[11]的结果, 本文所得到的采样

区间上界的值提高了 71.49%，对比于文献[12]，本文所得到的采样区间上界的值提高了 25.22%。

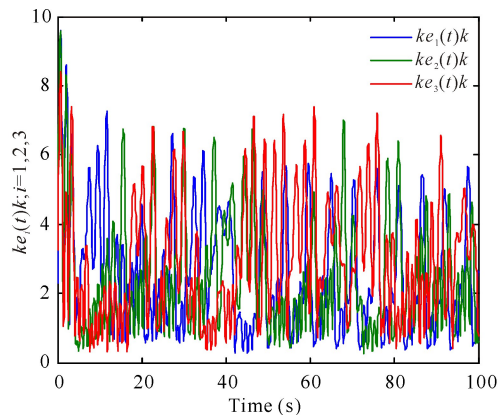


图 1 Chua's 电路在没有采样控制下误差动态的时间响应曲线

Fig. 1 The time response curves of the error dynamics of the Chua's circuit without sampled-data control

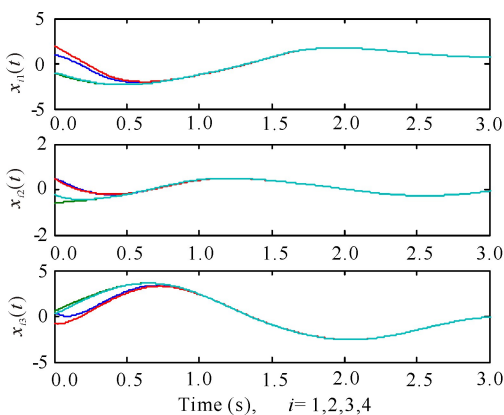


图 2 采样受控 Chua's 电路状态变量的时间响应曲线

Fig. 2 The time response curves of the state variables of the sampled-data controlled Chua's circuit

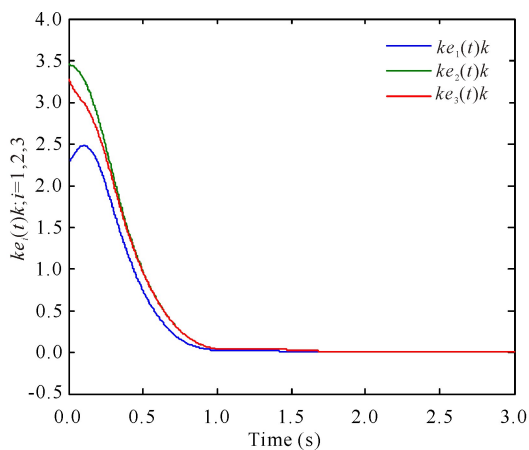


图 3 采样受控 Chua's 电路的同步误差 $\|e_i(t)\|$ 的时间响应曲线

Fig. 3 The time response curves of the synchronization errors $\|e_i(t)\|$ of the sampled-data controlled Chua's circuit

例 2 考虑一个具有 4 个节点的 Chua's 电路，系统参数表示如下：

$$A = \begin{bmatrix} -3.2 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.87 & 0 \end{bmatrix}, f(t, x_i) = \begin{bmatrix} 2.95(|x_{i1} + 1| - |x_{i1} - 1|) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, n=3, i=1, \dots, 4. \quad (48)$$

则根据所给出的 $f(t, x_i)$ 易知 $L = [5.9 \ 0 \ 0]$ 。

假设内耦合矩阵 $\Gamma = I_3$, $\tau(t) = 0.04 + 0.01\sin(20t)$ ，则有 $\tau = 0.05, \delta = 0.2$ 。另外，设耦合配置矩阵为

$$B = 0.2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

根据耦合配置矩阵 B 的结构，分布采样控制器(3)的增益矩阵 Δ 的结构如式(45)。

若在系统中各节点之间没有耦合，即 $B = 0$ ，取分布采样控制器的增益矩阵 Δ 为

$$\Delta = 10 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -15 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

则取 $a = 0.68, b = 1$ ，可求得系统的最大采样区间 $h = 0.0129$ 。文献[14]中的最大采样区间 $h = 0.0120$ 。显然，本文采用的方法放宽了采样区间的最大值，降低了保守性。

下面通过算法 1 来设计一个分布采样控制器且其增益矩阵形式如式(45)。取初值 $F_1^0 = F_2^0 = [2I_9 \ I_9 \ \mathbf{0}_9 \ \mathbf{0}_9 \ \mathbf{0}_9 \ \mathbf{0}_9]^T, a = 1.78, b = 0.6$ ，可求得最大的采样区间为 $h = 0.0187$ 。取 $h = 0.018$ ，通过算法 1 可求得 $\nu_0 = \sum_{(i,j) \in \epsilon} \nu_{ij}$ 的最小值为 25.5270。

其中 ν_{ij} 分别为

$$\nu_{14} = 7.2624, \nu_{24} = 2.8844, \nu_{32} = 6.1801, \nu_{42} = 9.2002. \quad (49)$$

在数值仿真中，取初始条件为

$$x(\theta) = (3, 2, 2, -1, 1, 4, -3, 1, 4, -2, -1, 2)^T, \theta \in [-1, 0]. \quad (50)$$

通过仿真图可知，在没有采样控制下 CDNs(48)自身不能实现自同步(图 4)。在相同初始条件(50)下，取 ν_{ij} 的值如(49)，CDNs(48)在分布采样控制下可以实现状态全局同步(图 5~6)。

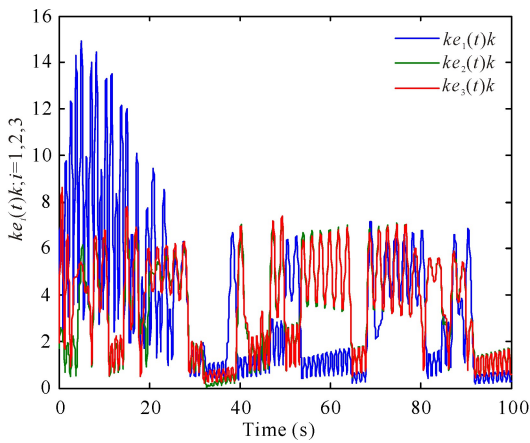


图4 CDNs电路在没有采样控制下状态误差的时间响应曲线

Fig. 4 The time response curves of the error dynamics of the CDNs without sampled-data control

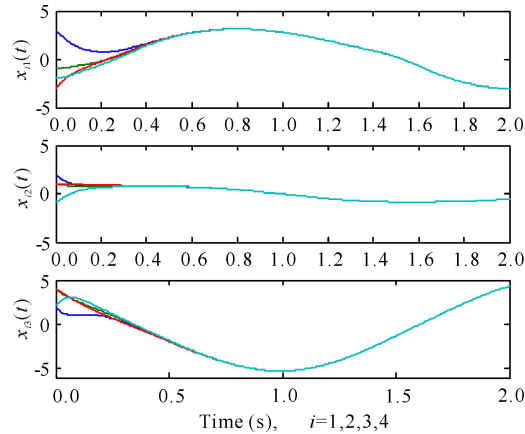


图5 CDNs在分布采样控制下的状态变量时间响应曲线

Fig. 5 The time response curves of the state variables of the CDNs under the distributed sampled-data control

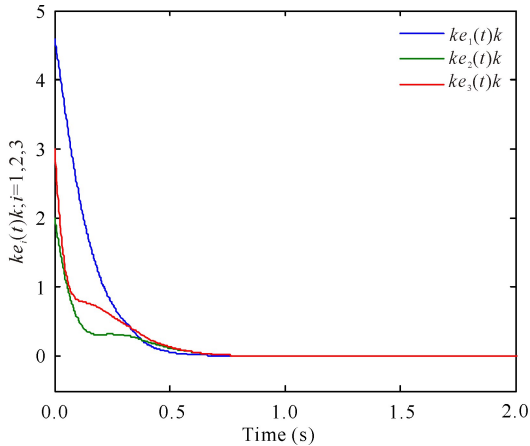


图6 分布采样受控CDNs的同步误差 $\|e_i(t)\|$ 的时间响应曲线

Fig. 6 The time response curves of the synchronization errors $\|e_i(t)\|$ of the sampled-data controlled CDNs

5 结论

基于分布采样控制策略,本文研究了一类具有耦

合时变时滞的CDNs的状态同步问题.通过引入时间依赖的Lyapunov函数方法结合凸组合技术,运用Jensen不等式处理积分项,建立了一个具有较少保守性的分布采样同步判据,并给出了一个优化算法设计一个具有最小耦合力的分布采样控制器.所得到的判据依赖于采样区间的上界,相比于已往的研究结果,该判据放宽了采样区间的上界.

参考文献:

- [1] CHEN W H, WANG Z P, WEI D, et al. Observer design for Lipschitz nonlinear systems with nonuniformly sampled measurements[C]//Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference, Xi'an, China: IEEE, 2013: 6687-6691.
- [2] ZHANG C K, HE Y, WU M. Exponential synchronization of neural networks with time-varying mixed delays and sampled-data[J]. Neurocomputing, 2010, 74(1/2/3): 265-273.
- [3] LU J G, HILL D J. Global asymptotical synchronization of chaotic Lur'e systems using sampled data: A linear matrix inequality approach[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2008, 55(6): 586-590.
- [4] CHEN W H, WANG Z P, LU X M. On sampled-data control for master-slave synchronization of chaotic Lur'e systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2012, 59(8): 515-519.
- [5] CHEN W H, JIANG Z Y, ZHONG J C, et al. On designing decentralized impulsive controllers for synchronization of complex dynamical networks with nonidentical nodes and coupling delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(8): 4084-4110.
- [6] CHEN W H, JIANG Z Y, LU X M, et al. H_∞ synchronization for complex dynamical networks with coupling delays using distributed impulsive control[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2015, 17: 111-127.
- [7] LI N, ZHANG Y L, HU J W, et al. Synchronization for general complex dynamical networks with sampled-data[J]. Neurocomputing, 2011, 74(5): 805-811.
- [8] SHEN B, WANG Z D, LIU X H. Sampled-data synchronization control of dynamical networks with stochastic sampling[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(10): 2644-2650.
- [9] LEE T H, WU Z G, PARK J H. Synchronization of a complex dynamical network with coupling time-varying delays via sampled-data control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(3): 1354-1366.
- [10] WU Z G, PARK J H, SU H Y, et al. Exponential synchronization for complex dynamical networks with

sampled-data [J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(9): 2735-2749.

[11] JIA Q, LIU Y, TANG W. Synchronization of networked multi-agents system with sampling communications [C]//Proceedings of 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing, Dalian, China: IEEE, 2010: 460-465.

[12] WANG Y W, XIAO J W, WEN C Y, et al. Synchronization of continuous dynamical networks with discrete-time communications [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(12): 1979-1986.

[13] WANG J A, WEN X Y. Sampled-data synchronization for complex dynamical networks with time-varying coupling delay and random coupling strengths [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014, 2014: 457457.

[14] WU Z G, SHI P, SU H Y, et al. Sampled-data exponen-

tial synchronization of complex dynamical networks with time-varying coupling delay [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(8): 1177-1187.

[15] CHEN W H, ZHENG W X. Input-to-state stability for networked control systems via an improved impulsive system approach [J]. Automatica, 2011, 47(4): 789-796.

[16] GU K Q, KHARITONOV V L, CHEN J. Stability of time-delay systems [M]. New York: Springer Science & Business Media, 2003.

[17] PARK P, KO J W, JEONG C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays [J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.

(责任编辑: 陆 雁)

《广西科学》致谢 2016—2017 年审稿专家

《广西科学》在主办单位以及主编、编委和审稿专家的大力支持下,圆满完成了 2017 年 1~6 期的编辑和出版工作。专家们在百忙中承担繁重的审稿任务,是您严谨治学的态度及奉献精神保证了《广西科学》的学术质量。同时,编辑和投稿作者有幸也得到了审稿专家的帮助。《广西科学》编辑部在此谨向以下审稿专家致以诚挚的敬意和谢意!并祝各位在新的一年里身体健康,万事如意!

万 中	王 勤	王 瑁	王 静	王玉霞	王桂文	邓雁如	韦宇拓
韦保耀	冯春华	冯家勋	申玉春	农旭华	刘小玲	刘布鸣	刘永学
刘永贤	刘连芳	刘洪波	吕跃进	吕镇梅	孙丰强	江 涛	许罕多
过 杰	何 斌	何铁光	何斌源	吴海一	宋金明	张 杰	张鸿雁
李文红	李先琨	李陶深	李高荣	李瑞杰	沈爱国	陈 刚	陈 剑
陈宁江	陈庆锋	陈武华	陈洪松	周本杰	庞 浩	郑媛媛	胡小波
胡亚芹	郝林华	唐 立	唐 亚	郭新宇	陶 勇	高劲松	高英俊
高程海	梁士楚	黄 凯	黄庶识	童张法	赖俊翔	翟军勇	谭伟福
谭光兴	黎 宁	黎广钊	薛 郁				

注:专家名单按姓氏笔画顺序排序,截止到 2017 年 12 月 20 日。

《广西科学》编辑部
2017 年 12 月 20 日