广西科学,2021年,28卷,第2期 Guangxi Sciences,2021,Vol.28 No.2

◆算法研究与应用◆

基于凸组合技术的加速 FR 型共轭梯度算法*

李丹丹[1],王松华[2]**

(1.广州华商学院应用数学系,广东广州 511300;2.百色学院数学与统计学院,广西百色 533000)

摘要:为高效求解非线性方程组问题,利用凸组合技术设计一个新型搜索方向,同时结合加速线搜索技术,提出一个新的加速 FR 型共轭梯度算法。在合理的假设下,新算法拥有全局收敛的良好性质。数值试验结果表明,新算法总体上优于经典 FR 算法和三项 FR 算法。新算法继承了修正 FR 方法的良好数值效果、充分下降性及信赖域特征,并具有计算简单和存储量小的特点。

关键词:非线性方程组 共轭梯度法 凸组合 充分下降性 全局收敛性

中图分类号:O224 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2021)02-0160-07

DOI:**10.13656/j.cnki.gxkx.20210610.002**

0 引言

在振动系统、潮流方程等科学与工程计算领域存在许多大规模优化问题[1,2],而这些优化问题往往能够转化为非线性方程组问题。因此,研究求解大规模非线性方程组的高效数值算法具有重要的理论价值与实际意义。

本文主要考虑以下非线性方程组问题:

$$F(x)=0, x\in R^n, \tag{1}$$

其中 $F:R^n\rightarrow R^n$ 是连续可微非线性函数。令 $f(x)=\frac{1}{2}\|F(x)\|^2$,其中 $\|\cdot\|$ 为 Euclidean 范数,那么求解非线性方程组问题(1)等价于求解如下无约束优化问题:

$$\min f(x), x\in R^n。$$

近年来,求解上述优化问题的常见算法有牛顿法、信赖域法、拟牛顿法、Levenberg-Marquardt 算法及其各种变形[3-8]。在选择合理初始点的前提下,上述算法对于小规模优化问题具有快速收敛和数值效果良好等特点,但在迭代过程中,需要计算和存储相关矩阵信息,给求解大规模优化问题带来一定的局限性。为建立求解大规模优化问题的高效算法体系,研究者提出具有算法简单、计算和存储量低等优点的共轭梯度法[9-11]。

经典共轭梯度法的一般迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k, k=0,1,2,\ldots,$$

其中 α_k 为由某种线搜索所决定的步长。搜索方向

*广西自然科学基金项目(2018GXNSFAA281259,2020GXNSFAA159069)和广东财经大学华商学院校内项目(2020HSDS15)资助。

【作者简介】

李丹丹(1991-),女,硕士,主要从事最优化理论与方法研究,E-mail:735035188@qq.com。

【**通信作者】

王松华(1970-),男,本科,副教授,主要从事最优化理论与方法研究,E-mail:523429892@qq.com。

【引用本文】

李丹丹,王松华.基于凸组合技术的加速 FR 型共轭梯度算法[J].广西科学,2021,28(2):160-166.

LI D D,WANG S H. Accelerated FR Conjugate Gradient Algorithm Based on Convex Combination Technology [J]. Guangxi Sciences,2021,28(2):160-166.

d_k 为

$$d_k=\begin{cases}-F_k, & k=0\\ -F_k+\beta_k d_{k-1}, & k\geqslant 1\end{cases},$$

其中,β_k 为共轭参数,F_k 为 $F(x_k)$ 的简写。

本文基于 Abubakar 等[12] 提出的修正 FR 搜索方向,借鉴 Yuan 等[13] 的凸组合思想,构造凸组合系数如下:

$$N_k=\frac{\|y_{k-1}\|^2}{y_{k-1}^{\mathrm{T}}\omega_{k-1}^{*}},$$

其中: $y_{k-1}=F_k-F_{k-1}$,$\omega_{k-1}^{*}=\omega_{k-1}+\left(\max\left\{0,\frac{-\omega_{k-1}^{\mathrm{T}}y_{k-1}}{\|y_{k-1}\|^2}\right\}+1\right)y_{k-1}$,$\omega_{k-1}=x_k-x_{k-1}$。

同时,采用 Andrei[14] 的加速线搜索技术,提出一个求解大规模非线性方程组问题的加速 FR 型共轭梯度算法。

1 算法描述与性质

本节主要讨论搜索方向的构建并介绍线搜索技术,同时提出凸组合修正共轭梯度算法。

首先,Abubakar 等[12] 在 2019 年提出一种修正 FR 共轭梯度法,其搜索方向为

$$d_k=\begin{cases}-F_k, & k=0\\ -F_k+\dfrac{\|F_k\|^2\omega_{k-1}-F_k^{\mathrm{T}}\omega_{k-1}F_k}{\max\{\mu\|\omega_{k-1}\|\|F_k\|,\|F_{k-1}\|^2\}}, & k\geqslant 1\end{cases},$$

其中,$\omega_{k-1}=x_k-x_{k-1}$,$\mu>0$。该搜索方向具备充分下降性和信赖域特征,能有效求解大规模无约束优化问题。基于 Yuan 等[13] 的凸组合思想,本文构建一个新型的凸组合搜索方向:

$$d_k=\begin{cases}-F_k, k=0\\ -N_kF_k+(1-N_k)(\|F_k\|^2\omega_{k-1}-F_k^{\mathrm{T}}\omega_{k-1}F_k)/\\ \quad\max\{2\mu\|\omega_{k-1}\|\|F_k\|,\|F_{k-1}\|^2\}, k\geqslant 1\end{cases}, \tag{2}$$

其中,N_k 满足如下性质:$y_{k-1}^{\mathrm{T}}\omega_{k-1}^{*}\geqslant\max\{y_{k-1}^{\mathrm{T}}\omega_{k-1},\|y_{k-1}\|^2\}\geqslant\|y_{k-1}\|^2>0$,对任意的 k 都有 $N_k\in(0,1]$。

其次,本文通过下述方法计算步长 $\alpha_k=r^{m_k}$,使得 m_k 满足下式的最小非负整数,即

$$f(x_k+r^m d_k)-f(x_k)\leqslant\sigma(r^m)^2F_k^{\mathrm{T}}d_k, \tag{3}$$

其中,$\sigma\in(0,1)$,$r\in(0,1)$。Andrei[14] 研究表明,合理地应用加速线搜索,将有效提高算法的计算效率。于是借鉴于 Andrei[14] 的加速线搜索技术思想,对步长 α_k 做出修正,即

$$\tilde{\alpha}=\gamma_k\alpha_k,$$

其中 $\varphi_k=\alpha_kF_k^{\mathrm{T}}d_k$,$\theta_k=-\alpha_ky_{k-1}^{\mathrm{T}}d_k$,$\gamma_k=-\dfrac{\varphi_k}{\theta_k}$。若 $\theta_k>0$,则记 $\alpha_k=\tilde{\alpha}$。

最后,建立求解非线性方程组问题(1)的凸组合加速 FR 型共轭梯度算法(MMFR)。

步骤 1:给定初始点 $x_0\in R^n$,参数 $\varepsilon,\sigma,r,\beta,\mu\in(0,1)$,令 $k:=0$;

步骤 2:若 $\|F_k\|\leqslant\varepsilon$,则算法停止;

步骤 3:通过式(2)计算搜索方向 d_k;

步骤 4:若 $\|F(x_k+d_k)\|\leqslant\beta\|F_k\|$,则令步长 $\alpha_k=1$,转步骤 6,否则转步骤 5;

步骤 5:通过式(3)决定步长 α_k;

步骤 6:计算 θ_k 和 $\tilde{\alpha}$,若 $\theta_k>0$,则令 $\alpha_k=\tilde{\alpha}$,否则保持步长 α_k 不变;

步骤 7:(更新步)更新新的迭代点 $x_{k+1}=x_k+\alpha_kd_k$,令 $k:=k+1$,转步骤 2。

为后续证明算法的全局收敛性质,下面分析搜索方向 d_k 的两个重要性质:充分下降性和信赖域特性。

引理 1 算法 MMFR 产生的序列 $\{d_k\}$ 和 $\{F_k\}$ 满足以下性质:

$$F_k^{\mathrm{T}}d_k\leqslant -N_k\|F_k\|^2, \tag{4}$$

及

$$\|d_k\|\leqslant\tau_k\|F_k\|, \tag{5}$$

其中,$\tau_k=\left(N_k+(1-N_k)\dfrac{1}{\mu}\right)$。

证明:当 $k=0$ 时,$F_0^{\mathrm{T}}d_0=-\|F_0\|^2$,$\|d_0\|=\|F_0\|$,显然式(4)(5)成立。当 $k\geqslant 1$ 时,由式(2)左乘 F_k^{T} 得

$$F_k^{\mathrm{T}}d_k=-N_k\|F_k\|^2+(1-N_k)\frac{\|F_k\|^2\omega_{k-1}^{\mathrm{T}}F_k-F_k^{\mathrm{T}}\omega_{k-1}F_k^{\mathrm{T}}F_k}{\max\{2\mu\|\omega_{k-1}\|\|F_k\|,\|F_{k-1}\|^2\}}\leqslant -N_k\|F_k\|^2。$$

此外,由式(2)和 Cauchy-Schwartz 不等式可知

$$\|d_k\|=\|-N_kF_k+(1-N_k)\cdot\frac{\|F_k\|^2\omega_{k-1}-F_k^{\mathrm{T}}\omega_{k-1}F_k}{\max\{2\mu\|\omega_{k-1}\|\|F_k\|,\|F_{k-1}\|^2\}}\|\leqslant N_k\|F_k\|+(1-N_k)\cdot\frac{\|F_k\|^2\|\omega_{k-1}\|+\|F_k\|\|\omega_{k-1}\|\|F_k\|}{2\mu\|\omega_{k-1}\|\|F_k\|}\leqslant\left(N_k+(1-N_k)\frac{1}{\mu}\right)\|F_k\|,$$

综上所述,式(4)和式(5)成立,引理 1 得证。

2 全局收敛性分析

为进一步分析算法 MMFR 的收敛性,本节做如下假设:

假设 H

(H1)函数 $F(x)$ 在开凸集 $\Omega_1 \subseteq \Omega = \{x \mid \|F(x)\| \leqslant \|F(x_0)\|\}$ 是连续可微的;

(H2)函数 $F(x)$ 的雅可比矩阵为 $\nabla F(x)$ 是有界的且为对称正定矩阵,即存在正常数 $\xi_1 \geqslant \xi_2 > 0$,使得有 $\|\nabla F(x)\| \leqslant \xi_1$ 和 $\xi_2 \|p\|^2 \leqslant p^{\mathrm{T}} \nabla F(x) p \leqslant \xi_1 \|p\|^2$,$p \in R^n$。

引理 2 在假设 H 条件下,序列 $\{x_k\}$、$\{\alpha_k\}$、$\{F_k\}$ 和 $\{d_k\}$ 是由算法 MMFR 产生的,那么 $\{\|F_k\|\}$ 为单调递减的收敛序列且 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\alpha_k F_k\| = 0$。

证明:由 Brown 等[15]的引理 3.8 可得

$$f(x_k + r^m d_k) - f(x_k) \leqslant \sigma_1 (r^m)^2 F_k^{\mathrm{T}} \nabla F_k d_k,$$

利用假设 H2 的公式,结合上式得 $f(x_k + r^m d_k) - f(x_k) \leqslant \sigma (r^m)^2 F_k^{\mathrm{T}} d_k$,其中 $\sigma = \sigma_1 \xi_1$。因此,线搜索是适定的。

由引理 1 和式(3)可推出

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) \leqslant -\sigma \alpha_k^2 N_k \|F_k\|^2 \leqslant 0, \tag{6}$$

这说明函数 $f(x)$ 沿着下降方向 d_k 是充分下降的。公式(6)结合 $f(x)$ 的定义可知,对于任意的 k,都有 $\|F_{k+1}\| \leqslant \|F_k\|$。此外,由式(3)和式(4)得出

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) \leqslant -\sigma \sum_{k=0}^{\infty} N_k \|\alpha_k F_k\|^2。$$

由假设 H1 中函数的有界性,再结合上式得

$$\sigma \sum_{k=0}^{\infty} N_k \|\alpha_k F_k\|^2 \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x_0) - f(x_k + \alpha_k d_k) < \infty,$$

再结合 $N_k \in (0,1]$ 推得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\alpha_k F_k\| = 0$。

下面给出算法 MMFR 的全局收敛性定理。

定理 1 在假设 H 条件下,序列 $\{x_k\}$、$\{\alpha_k\}$、$\{F_k\}$ 和 $\{d_k\}$ 是由算法 MMFR 产生的,那么有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\nabla f(x_k)\| = 0$。

证明:由引理 2 可知,若 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k > 0$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}\|F_k\| = 0$,结合 $\nabla f(x) = \nabla F(x) F(x)$ 可知结论成立;若 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = 0$,则显然有 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k \neq r$,那么令 $\bar{\alpha}_k = \alpha_k r^{-1}$,于是有如下不等式成立:

$$f(x_k + \bar{\alpha}_k d_k) - f(x_k) > \sigma \bar{\alpha}_k^2 F_k^{\mathrm{T}} d_k。 \tag{7}$$

假设结论不成立,即存在正整数 ξ,对于任意 k,那么有

$$\|\nabla f(x_k)\| > \xi。 \tag{8}$$

另外,由假设 H1 可知,集合为有界集合,则序列 $\{x_k\}$ 是有界的,于是可得序列 $\{d_k\}$ 也是有界的。不失一般性,设点 x^* 和 d^* 分别为序列 $\{x_k\}$ 和 $\{d_k\}$ 的聚点。因此,对式(7)取极限得

$$\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}} d^* \geqslant 0。$$

同理,对式(6)取极限得

$$\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}} d^* \leqslant 0。$$

上述两不等式可推出 $\nabla f(x^*)^{\mathrm{T}} d^* = 0$,由于 $\|d^*\| \neq 0$(如果 $\|d^*\| = 0$,那么由式(4)知 $\|F(x^*)\| = 0$),故 $\|\nabla f(x^*)\| = 0$,这与式(8)矛盾,于是结论成立。

定理 1 说明序列 $\{x_k\}$ 至少是线性收敛的,下面定理给出算法 MMFR 具有强收敛性质。

定理 2 在假设 H 条件下,若算法 MMFR 产生的任一子序列 $\{x_k\}$ 收敛于聚点 x^*,则非线性方程组问题(1)的最优解为 x^*,进一步有序列 $\{x_k\}$ 整列收敛于 x^*。

证明:类似于 Yuan[16] 中定理 3.4 的证明方法,易证结论成立,故省略证明过程。

3 数值试验

本节通过比较算法 MMFR、经典 FR、三项 FR 算法在求解大规模非线性方程组问题上的数值结果,验证算法 MMFR 的有效性与稳定性。

下面给出经典 FR 算法和三项 FR 算法的搜索方向,分别为

$$d_k = \begin{cases} -F_k, & k = 0 \\ -F_k + \dfrac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} d_{k-1}, & k \geqslant 1 \end{cases}, \tag{9}$$

$$d_k = \begin{cases} -F_k, & k = 0 \\ -F_k + \dfrac{\|F_k\|^2}{\|F_{k-1}\|^2} \omega_{k-1} + \dfrac{F_k^{\mathrm{T}} \omega_{k-1}}{\|F_{k-1}\|^2} F_k, & k \geqslant 1 \end{cases}。 \tag{10}$$

在算法 MMFR 的步骤 2 中,分别采用式(9)和式(10)产生搜索方向,其余步骤不变,得到的算法记为 FR 算法和 MFR 算法。

参数设置：$r=0.5,\sigma=0.068,\mu=0.25,\beta=0.5$。程序运行环境：MATLAB(2014a)软件实现，Windows10 (64 bite)，RAM：8 G，CPU 3.60 GHz。

算法终止准则为 $\|F_k\| \leqslant 10^{-5}$ 或 Iter>3000，维数为[4500，12000，24000，30000，45000]。测试问题的函数名称和初始点[17]见表1，数值试验结果如表2所示，其中Pro (Problem)为问题序号，Dim (Dimension)为维数，Iter (Iterations)为迭代次数，NF (The number of function)为函数 $F(x)$ 计算次数，Time为程序运行时间(单位：s)。根据迭代次数、函数计算次数和运行时间可以看出，总体上算法MMFR最好，算法MFR其次，算法FR最差(表2)。

表1 测试函数

Table 1 Test function

序号 Number	函数名称 Function name	初始点 Initial point
1	Exponential function 2	$\left[\frac{1}{n^2},\frac{1}{n^2},\ldots,\frac{1}{n^2}\right]$
2	Trigonometric function	$\left[\frac{101}{100\times n},\frac{101}{100\times n},\ldots,\frac{101}{100\times n}\right]$
3	Broyden tridiagonal function	$[-1,-1,\ldots,-1]$
4	Trigexp function	$[0,0,\ldots,0]$
5	Strictly convex function 1	$\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right]$
6	Variable dimensioned function	$\left[1-\frac{1}{n},1-\frac{2}{n},\ldots,1-\frac{n}{n}\right]$
7	Five-diagonal system	$[-2,-2,\ldots,-2]$
8	Extended freudentein and roth function	$[6,3,\ldots,6,3]$
9	Discrete boundry value problem	$[h\times(1\times h-1),h\times(2\times h-1),\ldots,h\times(n\times h-1)]$, $h=1/(n+1)$
10	Troesch problem	$[0.5,0.5,\ldots,0.5]$

表2 数值结果

Table 2 Numerical results

问题 Pro	维数 Dim	MMFR			FR			MFR		
		迭代次数 Iter	计算次数 NF	运行时间 Time	迭代次数 Iter	计算次数 NF	运行时间 Time	迭代次数 Iter	计算次数 NF	运行时间 Time
1	4 500	17	193	3.47E-02	12	133	2.63E-02	17	193	3.44E-02
	12 000	12	148	6.58E-02	14	179	8.55E-02	12	148	6.42E-02
	24 000	9	116	9.87E-02	13	177	1.58E-01	9	116	9.70E-02
	30 000	10	134	1.37E-01	14	189	2.05E-01	10	134	1.35E-01
	45 000	9	123	1.96E-01	20	286	4.61E-01	9	123	1.94E-01
2	4 500	9	21	1.26E-02	114	674	3.97E-01	8	28	1.64E-02
	12 000	8	19	2.98E-02	103	608	9.24E-01	8	28	4.19E-02
	24 000	8	19	5.72E-02	99	584	1.74E+00	8	28	8.04E-02
	30 000	8	19	6.85E-02	103	608	2.25E+00	8	28	9.88E-02
	45 000	8	19	1.03E-01	104	614	3.43E+00	8	28	1.48E-01
3	4 500	32	147	2.81E-02	1 685	24 996	4.37E+00	78	382	6.84E-02
	12 000	33	152	7.23E-02	1 732	25 644	1.12E+01	74	362	1.61E-01

续表 2

Continued table 2

问题 Pro	维数 Dim	MMFR			FR			MFR		
		迭代次数 Iter	计算次数 NF	运行时间 Time	迭代次数 Iter	计算次数 NF	运行时间 Time	迭代次数 Iter	计算次数 NF	运行时间 Time
	24 000	32	146	1.32E-01	1 745	25 794	2.19E+01	71	347	3.02E-01
	30 000	33	151	1.69E-01	1 751	25 876	2.71E+01	64	312	3.38E-01
	45 000	33	151	2.64E-01	1 753	25 893	4.21E+01	69	336	5.54E-01
4	4 500	73	433	1.77E-01	1 116	16 252	6.46E+00	1 743	10 459	4.30E+00
	12 000	73	433	4.58E-01	1 117	16 266	1.66E+01	1 743	10 459	1.10E+01
	24 000	73	433	8.98E-01	1 117	16 266	3.28E+01	1 743	10 459	2.14E+01
	30 000	73	433	1.11E+00	1 117	16 266	4.09E+01	1 743	10 459	2.65E+01
	45 000	73	433	1.68E+00	1 118	16 280	6.15E+01	1 743	10 459	3.93E+01
5	4 500	25	72	1.62E-02	13	25	4.86E-03	9	17	3.37E-03
	12 000	25	72	4.01E-02	13	25	1.20E-02	9	17	8.30E-03
	24 000	26	75	7.70E-02	13	25	2.27E-02	9	17	1.58E-02
	30 000	26	75	9.49E-02	13	25	2.81E-02	9	17	1.97E-02
	45 000	26	75	1.48E-01	13	25	4.47E-02	9	17	3.07E-02
6	4 500	2	3	1.85E-04	2	3	1.91E-04	2	3	1.94E-04
	12 000	2	3	3.68E-04	2	3	3.89E-04	2	3	3.69E-04
	24 000	2	3	6.24E-04	2	3	6.31E-04	2	3	6.25E-04
	30 000	2	3	7.68E-04	2	3	7.68E-04	2	3	7.56E-04
	45 000	2	3	2.05E-03	2	3	2.07E-03	2	3	2.07E-03
7	4 500	357	2 472	7.49E-01	1 398	20 345	6.05E+00	2 320	16 232	4.86E+00
	12 000	359	2 485	1.92E+00	1 038	14 996	1.14E+01	304	2 058	1.55E+00
	24 000	360	2 492	3.75E+00	1 061	15 218	2.26E+01	2 345	16 407	2.44E+01
	30 000	360	2 492	4.64E+00	1 052	15 175	2.80E+01	311	2 119	3.89E+00
	45 000	359	2 485	7.09E+00	1 070	15 479	4.37E+01	299	2 025	5.67E+00
8	4 500	199	1 510	3.05E-01	93	996	1.93E-01	117	798	1.56E-01
	12 000	207	1 572	7.98E-01	96	1 017	4.91E-01	120	820	4.02E-01
	24 000	211	1 603	1.56E+00	97	1 024	9.61E-01	124	847	8.04E-01
	30 000	214	1 627	1.96E+00	98	1 030	1.20E+00	124	847	9.95E-01
	45 000	215	1 634	3.05E+00	98	1 030	1.85E+00	125	853	1.55E+00
9	4 500	10	36	2.64E-02	3 000	46 931	3.39E+01	15	66	4.79E-02
	12 000	6	20	3.84E-02	3 000	46 931	8.81E+01	11	46	8.70E-02
	24 000	4	13	4.94E-02	25	221	8.14E-01	7	27	1.00E-01
	30 000	3	9	4.17E-02	5	18	8.22E-02	6	22	1.01E-01
	45 000	3	9	6.24E-02	4	13	8.97E-02	4	13	8.99E-02
10	4 500	3	4	2.05E-04	3	4	1.91E-04	3	4	1.97E-04
	12 000	3	4	3.82E-04	3	4	3.66E-04	3	4	3.73E-04
	24 000	3	4	6.29E-04	3	4	6.27E-04	3	4	6.35E-04
	30 000	3	4	7.68E-04	3	4	7.66E-04	3	4	7.71E-04
	45 000	3	4	2.06E-03	3	4	2.08E-03	3	4	2.01E-03

为直观地展示 3 种算法的性能差异,本节采用性能曲线描绘方法[18]分别描绘出迭代次数性能图、函数计算次数性能图和运行时间性能图(图 1-3)。由图 1-3 可知,算法 MMFR 总体上比算法 MFR 和算

法 FR 更优，且具有更好的鲁棒性，因此本文提出的算法 MMFR 是有效的和鲁棒的。

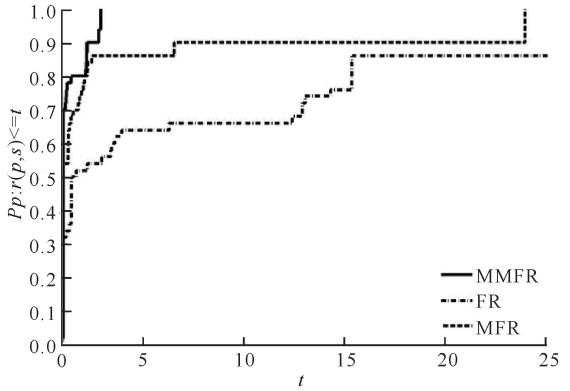

图 1　迭代次数性能图

Fig. 1　Performance profiles of the number of iterations

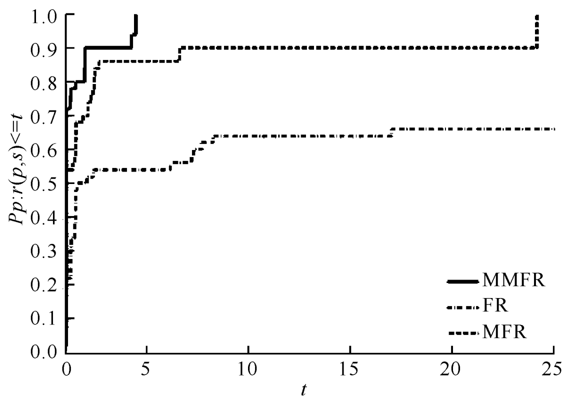

图 2　函数计算次数性能图

Fig. 2　Performance profiles of the number of computing function

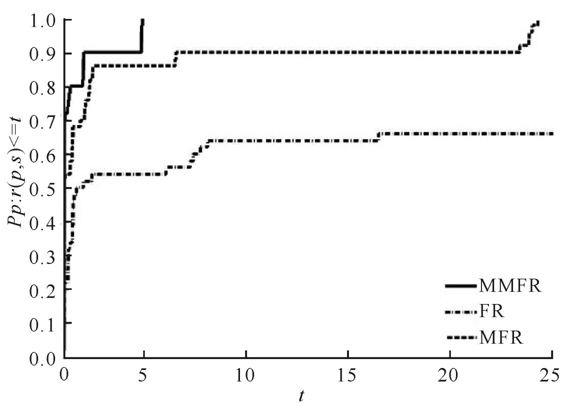

图 3　运行时间性能图

Fig. 3　Performance profiles of CPU-Time

4　结论

本文在修正 FR 算法的基础上，结合凸组合思想，构造出一个新的修正搜索方向，并利用加速线搜索技术，提出一个加速 FR 型共轭梯度算法。新的搜索方向不依赖线搜索，具有充分下降和信赖域特性，还具有良好的理论性质与数值效果。因计算简单，存储量小，十分适合求解大规模非线性方程组问题。同时，也可尝试将新算法进一步推广到信号恢复等实际应用中。

参考文献

[1]　WANG Y J，CACCETTA L，ZHOU G L. Convergence analysis of a block improvement method for polynomial optimization over unit spheres [J]. Numerical Linear Algebra with Applications，2015，22(6)：1059-1076.

[2]　WANG C W，WANG Y J. A superlinearly convergent projection method for constrained systems of nonlinear equations [J]. Journal of Global Optimization，2009，44(2)：283-296.

[3]　YUAN G L，WEI Z X. A trust region algorithm with conjugate gradient technique for optimization problems [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization，2011，32(2)：212-232.

[4]　GAO H，ZHANG H B，LI Z B，et al. A nonmonotone inexact Newton method for unconstrained optimization [J]. Optimization Letters，2017，11(5)：947-965.

[5]　CAO H P. A new Quasi-Newton method based on adjoint broyden updates for symmetric nonlinear equations [J]. Journal of the Korean Mathematical Society，2016，53(6)：1371-1389.

[6]　ZHOU Q Y，SUN W Y，ZHANG H C. A new simple model trust-region method with generalized Barzilai-Borwein parameter for large-scale optimization [J]. Science China Mathematics，2016，59(11)：2265-2280.

[7]　NIRI T D，FAZELI S A S，HEYDARI M. A two-step improved Newton method to solve convex unconstrained optimization problems [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing，2020，62(1)：37-53.

[8]　CHEN L，MA Y F. Shamanskii-Like Levenberg-Marquardt method with a new line search for systems of nonlinear equations [J]. Journal of Systems Science and Complexity，2020，33(5)：1694-1707.

[9]　王松华，吴加其. 新线搜索下修正 PRP 共轭梯度法的全局收敛性及其数值结果[J]. 广西科学，2018，25(6)：728-733.

[10]　DJORDJEVIĆ S S. New hybrid conjugate gradient method as a convex combination of Ls and Fr methods [J]. Acta Mathematica Scientia：English Series，2019，39(1)：214-228.

[11]　DAI Y H，KOU C X. A Barzilai-Borwein conjugate gradient method [J]. Science China Mathematics，2016，

59(8):1511-1524.
[12] ABUBAKAR A B,KUMAM P,MOHAMMAD H,et al. A modified Fletcher - Reeves conjugate gradient method for monotone nonlinear equations with some applications [J]. Mathematics,2019,7(8):745.
[13] YUAN G L,LI T T,HU W J. A conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations and image restoration problems [J]. Applied Numerical Mathematics,2020,147:129-141.
[14] ANDREI N. Another conjugate gradient algorithm with guaranteed descent and conjugacy conditions for Large-scale unconstrained optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2013,159(1):159-182.
[15] BROWN P N,SAAD Y. Convergence theory of nonlinear Newton-Krylov algorithms [J]. Siam Journal on Optimization,1994,4(2):297-330.
[16] YUAN G L. A new method with descent property for symmetric nonlinear equations [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization,2010,31(8):974-987.
[17] YUAN G L,HU W J. A conjugate gradient algorithm for large-scale unconstrained optimization problems and nonlinear equations [J]. Journal of Inequalities and Applications,2018,2018(1):113.
[18] DOLAN E D,MORÉ J J. Benchmarking optimization software with performance profiles [J]. Mathematical Programming,2002,91(2):201-213.

Accelerated FR Conjugate Gradient Algorithm Based on Convex Combination Technology

LI Dandan[1], WANG Songhua[2]
(1. Department of Applied Mathematics,Guangzhou Huashang College,Guangzhou,Guangdong,511300,China;2. School of Mathematics and Statistics,Baise University,Baise,Guangxi,533000,China)

Abstract: In order to solve the problem of nonlinear equations efficiently,a novel search direction is designed by using convex combination technology. Combined with accelerated line search technology,a new accelerated FR conjugate gradient algorithm is proposed. Under reasonable assumptions,the new algorithm has good properties of global convergence. The numerical results show that the new algorithm is generally superior to the classical FR algorithm and Three-term FR algorithm. The new algorithm inherits the good numerical effect,sufficient descent and trust region characteristics of the modified FR method,and has the characteristics of simple calculation and small storage.
Key words: nonlinear equations,conjugate gradient method,convex combination,sufficient descent trait,global convergence

责任编辑:米慧芝