DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1982.01.001

关于图的正规积的带宽的两个定理和 $T_{l_1l_2l_3} \times P_n$ 的带宽

广西大学数学系 麦结华

广西计算中心 罗海鹏

提 要

本文给出了与图的正规积中的顶点集的边界有关的两个定理，求出了一类特殊树型图与路的积的带宽。

引 言

设G是有N个顶点的图，V(G)是G的全体顶点的集合，称任一个1－1对应的函数f：V(G)→{1，2，…，N}为G(或V(G))上的一个标号，记

$$B(f)=\max\{f(u)-f(v):u\text{与}v\text{是}G\text{上相邻顶点}\},$$

称B(f)为标号f的带宽。又记

$$B(G)=\min\{B(f):f\text{是}V(G)\text{上的标号}\},$$

称B(G)为图G的带宽[1]。若f是V(G)上的一个标号且B(f)＝B(G)，则称f为V(G)上的最佳标号。如何计算一个给定的图的带宽？这是一个很有实际意义而引人注目的问题。在计算技术方面，当用计算机处理大型稀疏矩阵时，为减少存贮量及运算次数，需要使非零元素尽量向主对角线靠拢，此时便可考虑一个相应的图的带宽问题。但一般的图(甚至一般的树)的带宽的计算是个十分困难的NP—完全问题[2]，[3]，只有一些较为简单的图的带宽已经求出[1]，[4]－[8]。

本文给出了与图的正规积中的顶点集的边界有关的两个定理，求出了一类特殊的树型图与路的积的带宽。

在下面的讨论中，除使用一般图论著作中常见的概念及记号外，还使用如下一些记号：以J表示全体整数的集合；对任m及n∈J，当n≥m时记J[m, n]＝{m, m＋1，…，n}。当n＜m时记J[m, n]＝φ；又记Jn＝J[1，n]。对任一有限集S，以|S|表示S的元素个数。对任一个图G及W⊂V(G)，以$\partial_G W$表示图G中W的边界[4]，以$\mathrm{Int}_G W=W-\partial_G W$表示W的内部。当不至引起误会时，我们也把$\partial_G W$及$\mathrm{Int}_G W$简写为$\partial W$及$\mathrm{Int}W$。

本文1982年7月8日收到

§1. 图的正规积中的顶点集的边界

借助于Harper所给出的一个关于图的带宽的下界的定理[5]，仿照Chvátalová在〔4〕中所采用的"位移"方法，沈韵秋在〔6〕中求出了两条路的正规积$P_m \cdot P_n$的带宽。关于图的正规积的定义，可参看〔9〕。Harper关于图的带宽的下界的定理，乃是：

$$B(G) \geqslant \max\{\min\{|\partial S| : S \subset V(G),\ |S| = k\} : 1 \leqq k \leqq |V(G)|\}。\qquad (1.1)$$

但在运用Harper定理去求图G的带宽的下界时，需要考虑V(G)的所有子集的边界点个数，这是不很方便的。因此，我们希望找出V(G)的一个子集族F，使得V(G)的每一子集S的边界点数不会小于F中一个对应的集合S_0($|S_0| = |S|$)的边界点数。这样，我们就可以缩小(1.1)式中求下确界的范围。Chvátalová，沈韵秋，李乔，罗海鹏等人均对几种具体的乘积(或正规积)图提出过几条关于位移的引理[4],[6],[7],[8]，其目的便是如此。在文〔10〕中我们曾提出关于凝聚图与一般图的积的顶点集的收缩的两个定理，推广了上述诸人的结论。这两个定理是：

定理A　设G_1，G_2及H均是图。若$G_1 \overset{\partial}{\leqq} G_2$且$G_1$上有凝聚标号f，则$G_1 \times H \overset{\partial}{\leqq} G_2 \times H$。

定理B　设G及H均是图，G上有凝聚标号f。则对任$W \subset V(G \times H)$均有$|\partial T(W)| \leqq |\partial W|$。

这两个定理的证明请参看〔10〕，在此不再详述。本节我们给出关于凝聚图与一般图的正规积的顶点集的收缩的另外两个定理。

定义1.1　(1)设$W \subset V(G)$，若对任$Z \subset V(G)$，当$|Z| = |W|$时恒有$|\partial Z| \geqslant |\partial W|$，则称W是G(或V(G))的一个**凝聚集**；

(2)设f：$V(G) \to J_N$是V(G)的一个标号，若对$1 \leqq n \leqq N$，$f^{-1}(J_n)$总是G的凝聚集且

$$f(\mathrm{Int}(f^{-1}(J_n))) = J_{|\mathrm{Int}(f^{-1}(J_n))|},$$

则称f是G(或V(G))上的一个**凝聚标号**。此时，对任$n \in J_n$称$f^{-1}(J_n)$为G上相对于f的**标准凝聚集**。

定义1.2　(1)对任一图G及$i \in J$，记

$$b_i(G) = \min\{|\partial W| : W \subset V(G),\ |W| = i\}。$$

(2)设G_1及G_2是两个图。若$|V(G_1)| = |V(G_2)|$，且对$i \in J$均有$b_i(G_1) \leqq b_i(G_2)$则记$G_1 \overset{\partial}{\leqq} G_2$。

定义1.3　设G及H均是图，G上有凝聚标号f。对任$W \subset V(G \times H)$，令

$$T(W) = \bigcup_{v \in V(H)} f^{-1}(J_{|W \cap V(G \times \{v\})|}) \times \{v\},$$

称T(W)为W沿着由f所决定的方向的收缩。(简称T(W)为W的收缩)。

定理1.1　设H，G_1及G_2均是图，G_1上有凝聚标号f，$G_1 \overset{\partial}{\leqq} G_2$，则$G_1 \cdot H \overset{\partial}{\leqq} G_2 \cdot H$。

证　对任$W \subset V(G_2 \cdot H)$及$v \in V(H)$，令$W(v) = W \cap V(G_2 \cdot \{v\})$，Z

$(v)=f^{-1}(J_{|W(V)|})\cdot\{v\}$，$Z=\bigcup_{v\in V(H)}Z(v)$。对$i=1,2$，令$\partial_i=\partial_{G_i\cdot H}$，$Int_i=Int_{G_i\cdot H}$，$Int^{(i)}=Int_{G_i}$。又令$p_i:V(G_i\cdot H)\to V(G_i)$为$p_i(x,y)=x$，(任$(x,y)\in V(G_i\cdot H)$)。易验$|W(v)\cap Int_2W|=|Int^{(2)}(\cap\{p_2(W((y)):y\in V(H),\ d_H(y,v)\leqq 1\})|\leqq|Int^{(1)}(\cap\{p_1(Z(y)):y\in V(H),\ d_H(y,v)\leqq 1\})|=|Z(v)\cap Int_1Z|$。由此推出$|Int_2W|\leqq|Int_1Z|$，从而$|\partial_1Z|\leqq|\partial_2W|$。由W任意性及记号$\overset{\partial}{\leqq}$的定义即得出$G_1\cdot H\overset{\partial}{\leqq}G_2\cdot H$。

定理1.2　设G及H均是图，G上有凝聚标号f，$W\subset V(G\cdot H)$，$T(W)$是W沿着由f所决定的方向的收缩，则在图$G\cdot H$中有$|\partial T(W)|\leqq|\partial W|$。

证　在定理1.1的证明中，已证得$|\partial Z|\leqq|\partial W|$，当$G_2=G_1=G$时有$Z=T(W)$，故$|\partial T(W)|\leqq|\partial W|$。

路，圈和完全图两两之间可以有六个正规积，其中有三个正规积的带宽是显然的，即$B(K_m\cdot P_n)=2m-1$，$B(K_m\cdot C_n)=3m-1$，而$K_m\cdot K_n$即完全图K_{mn}，带宽为$mn-1$。另外三个正规积的带宽也已求出。沈韵秋求出了$P_m\cdot P_n$的带宽[6]，本文作者在〔10〕中求出了$P_m\cdot C_n$及$C_m\cdot C_n$的带宽，它们是$B(P_m\cdot C_n)=\min\{2m,n\}+1$　$(m\geqq 2,n\geqq 3)$，$B(C_m\cdot C_n)=2n+2(m\geqq n\geqq 3)$，并推广了沈韵秋在〔6〕中的结论，即证明了当$l_3\geqslant l_2\geqslant l_1\geqslant 2$时有

$$B(\underbrace{P_{l_1}\cdot P_{l_2}\cdot\cdots\cdot P_{l_2}}_{n个}\cdot P_{l_3})=1+\sum_{i=0}^{n}l_1l_2^{\,i}。$$

此外，我们还有下面的猜测[10]：

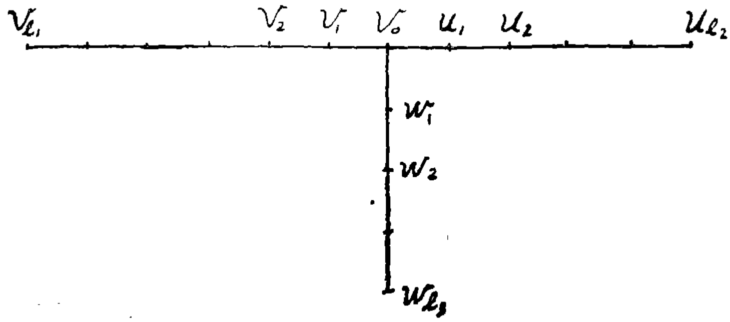
猜测1.1　设$n\geqslant 4$，$l_n\geqslant l_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant l_2\geqslant l_1\geqslant 2$，$G=P_{l_1}\cdot\cdots\cdot P_{l_n}$。按字典式排列的办法易作出$V(G)$上的标号f使$B(f)=1+\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{i}l_j$，我们估计$B(G)=1+\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{i}l_j$亦成立。

猜测1.2　设$n\geqslant 3$，$l_n\geqslant l_{n-1}\geqq\cdots\geqq l_2\geqq l_1\geqq 3$，$G=C_{l_1}\cdot\cdots\cdot C_{l_n}$。问$B(G)=2+2\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{i}l_j$是否成立？

§2. 树形图$T_{l_1l_2l_3}$与路P_n的积的带宽

当G_1及G_2均为路，圈或完全图时，图$G_1\times G_2$的带宽已经求出[1]，[4]，[7]，[8]，[10]。但就我们现在所知，更复杂一些的图的积的带宽问题则仍未有人解决*。为此，本节尝试解决一个较简单的树形图$T_{l_1l_2l_3}$与路P_n的积的带宽问题。树$T_{l_1l_2l_3}$乃是如下所示的一种图，不妨假定$l_1\geqq l_2\geqq l_3\geqq 1$。我们的结论是

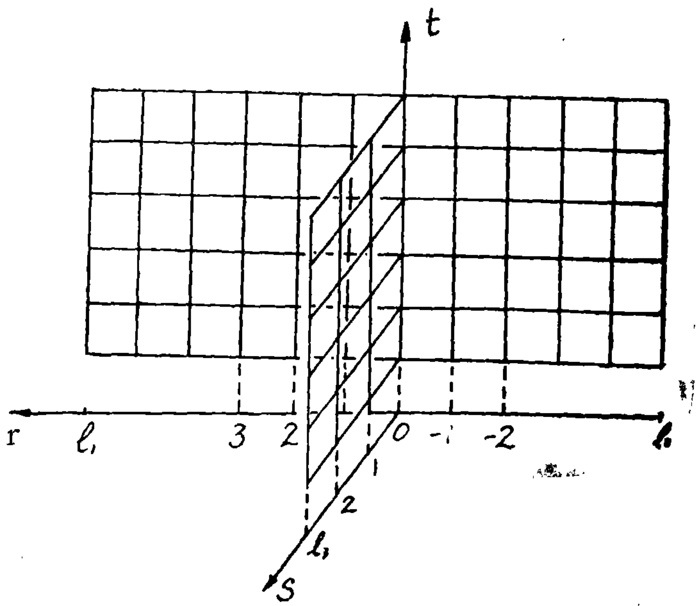
*）在本文完成之后，麦结华解决了较为广泛的一类图—Γ型凝聚图—的积的带宽问题。



定理2.1 $B(T_{l_1l_2l_3}\times P_n)=\min\{n,l_1+l_2+1\}+\min\{n,l_3\}$。

证 记$G=T_{l_1l_2l_3}\times P_n$，$V=V(G)$。为便于用坐标表示G的各点，不妨假定G是三维欧氏空间中的图如下图所示。其次，不妨只考虑$n\geqq z$的情形。又令

$$\beta(l_1,l_2,l_3,n)=\min\{n,l_1+l_2+1\}+\min\{n,l_3\} \quad (2.1)$$



（A）我们先证明

$$B(G)\leqq\beta(l_1,l_2,l_3,n). \quad (2.2)$$

为此，我们将给出V上的一个标号f_0使得

$$B(f_0)=\beta(l_1,l_2,l_3,n). \quad (2.3)$$

作函数ψ为：

$\psi(0,s)=l_3-s$，任$s\in J[0,l_3]$

$\psi(-r,0)=l_3+2r-1$，任$r\in J_{l_2}$

$$\psi(r,0)=\begin{cases} l_3+2r, & 任r\in J_{l_2}; \\ l_3+l_2+r, & 任r\in J[l_2+1,l_1]. \end{cases}$$

(A_1)当$l_3\geqq n$时，令

$$f_0(r,s,t)=n\psi(r,s)+t,\qquad 任(r,s,t)\in V.$$

易验此时(2.3)式成立。

(A_2)当$l_1+l_2+1\leqq n$时，令

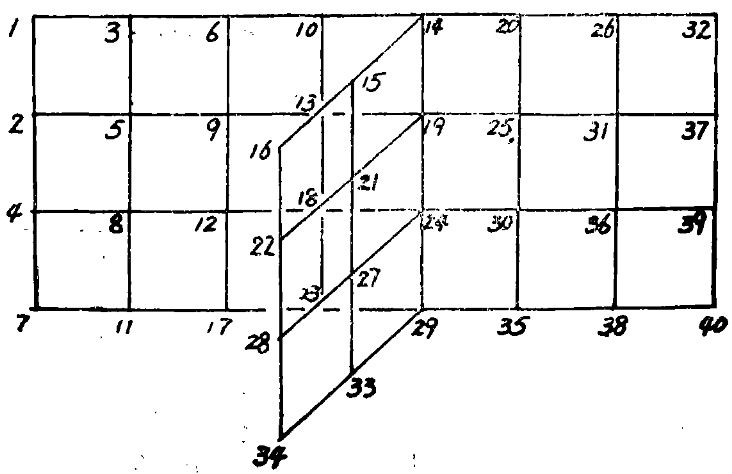
$$f_0(r,s,t)=(t-1)(l_1+l_2+l_3+1)+\psi(r,s)+1,\qquad 任(r,s,t)\in V.$$

易验此时(2.3)式亦成立。

(A_3)当$l_1+l_2+1>n>l_3$时，作函数Ψ为：对任$v=(r,s,t)\in V$，令$\Psi(v)=(r+t)(3l_1+n)^2-s(3l_1+n)+r$。又作标号$f_0: V\to J_{n(l_1+l_2+l_3+1)}$使得对任$v$及$w\in V$，当且仅当$\Psi(v)>\Psi(w)$时$f_0(v)<f_0(w)$。易验如此定义的标号$f_0$存在唯一且此时(2.3)式仍成立。

综上所述可知，无论何种情形(2.3)式均成立，因而(2.2)式成立。

(例：按(A_3)所给的定义，$T_{432}\times P_4$上的标号f_0乃如下图所示)。



(B)下面我们还需证明

$$B(G)\geqq\beta(l_1,l_2,l_3,n)\qquad(2.4)$$

(B_1)先考虑$l_1+l_2+1=n$或$n\geqq l_1=l_2=l_3\geqq n/2$的情形。对任$v=(r,s,t)\in V$，令$p(v)=(r,s)$，$q(v)=t$。又令

$$V_0=\{(0,0,t):t\in J_n\}$$

$$V_1=\{(r,0,t):(r,0,t)\in V,\ r>0\}$$

$$V_2=\{(r,0,t):(r,0,t)\in V,\ r<0\}$$

$$V_3=\{(0,s,t):(0,s,t)\in V,\ s>0\}$$

对任$W\subset V$及$i\in J_3$，令

$$\lambda_0(W)=|W\cap V_0|,$$

$\lambda_i(W)=|p(W\cap V_i)|$,

$\mu_i(W)=\max\{\lambda_0(W),\lambda_i(W)\}$

$\tau_i(W)=\min\{l_i,\ \mu_i(W)\}$

今考虑V上的任一标号f，为证（2.4）式，只需证

$$B(f)\geqslant\beta(l_1,l_2,l_3,n) \tag{2.5}$$

令$N=n(l_1+l_2+l_3+1)$，又令m是J_N中满足如下条件的最小整数：

$$\left.\begin{array}{l}\min\{1,\lambda_0(f^{-1}(J_m))\}+\sum\limits_{i=1}^{3}\tau_i(f^{-1}(J_m))\geqq n+l_3-1,\\ \text{且至少存在两个数}j,k\in J_3\text{，使得}\\ \quad\tau_j(f^{-1}(J_m))=l_j,\tau_k(f^{-1}(J_m))=l_k\end{array}\right\} \tag{2.6}$$

令$X=f^{-1}(J_m)$，因

$B(f)\geqslant\max\{\min(f(\partial(V-X)))-\min(f(\partial X)),\ \max(f(\partial(V-X)))-\max(f(\partial X))\}$.

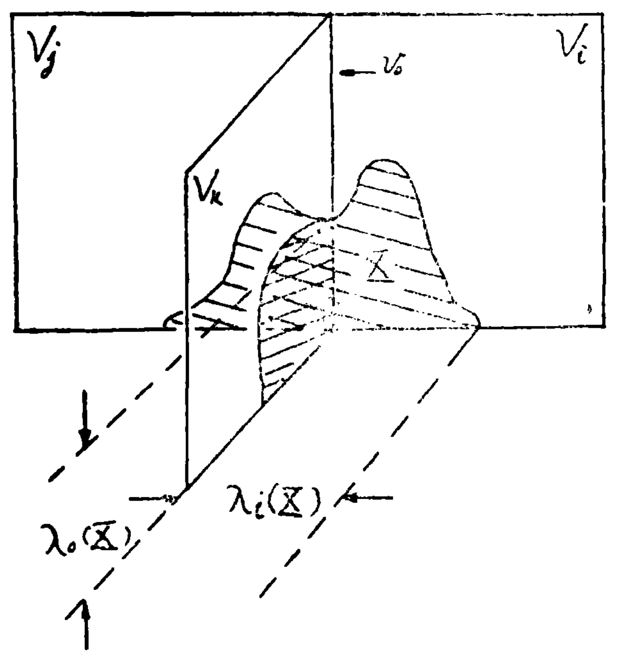
故为证（2.5）式，只需要证

$$\max\{|\partial X|,\ |\partial(V-X)|\}\geqq n+l_3 \tag{2.7}$$

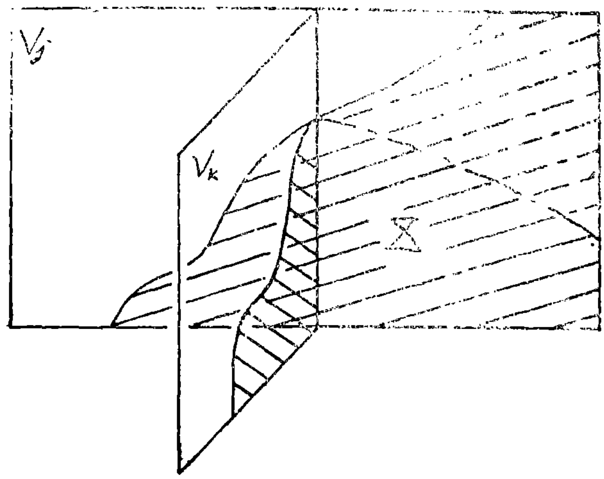
根据定理A，B，我们不妨假定沿着由Pn的某一凝聚标号所决定的方向收缩时X是不变集。其次，若$\lambda_0(X)=0$则$\partial X=\sum\limits_{i=1}^{3}(V_i\cap\partial X)\geqq\sum\limits_{i=1}^{3}\tau_i(X)\geqq n+l_3$，(2.7)式成立，故下面不妨假定$\lambda_0(X)>0$.

（i）若对$i\in J_3$均有$\lambda_i(X)<l_i$，则$|V_i\cap\partial(V-X)|\geqq\mu_i(X)\geqslant\tau_i(X)$。由此推出，当$\lambda_0(X)<n$时$|\partial(V-X)\geqq 1+\sum\limits_{i=1}^{3}\tau_i(X)\geqq n+l_3$.

当$\lambda_0(X)=n$时，更可直接推出$|\partial(V-X)|\geqq 3n>n+l_3$.

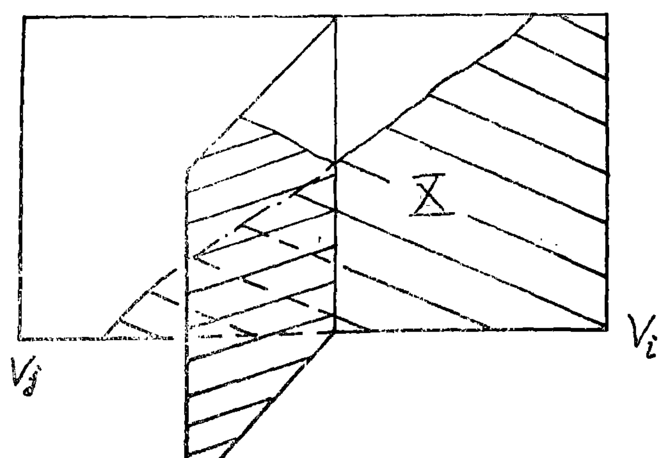


（ii）若恰有某一$i\in J_3$使$\lambda_i(X)=l_i$，设$J_3-\{i\}=\{j,k\}$，据条件（2.6）不妨假定$\tau_k(X)=l_k$，易见$|(V_i\cup V_0\cup V_j)\cap\partial(V-X)|\geqq\min\{n,l_i+1+\mu_j(X)\}$.

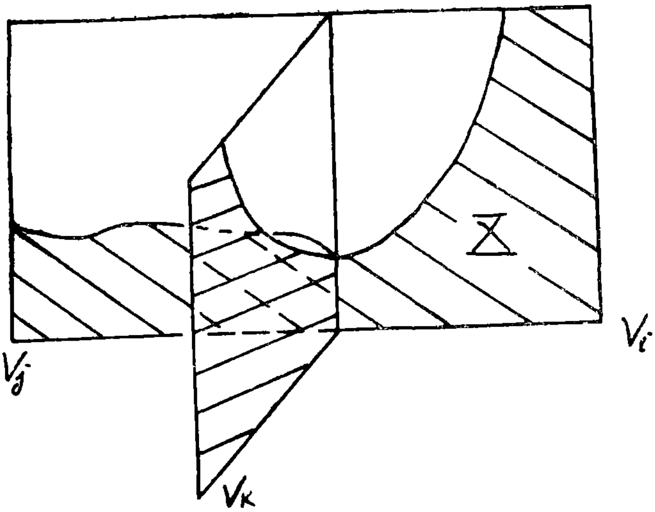


由此推出$|\partial(V-X)|\geqq\min\{n,l_i+1+\mu_j(X)\}+\mu_k(X)\geqq\min\{n+\tau_k(X),\ 1+\sum_{i=1}^{3}\tau_i(X)\}\geqq n+l_3$。

(iii)若恰有某两个数i，$k\in J_3$使$\lambda_i(X)=l_i,\lambda_k(X)=l_k$，设$j=J_3-\{i,k\}$，此时，若$|V_i\cap\partial X|<l_i$且$|V_k\cap\partial X|<l_k$,则因$m$是满足条件(2.6)的最小整数而有$\lambda_0(X)\leqq n+l_3-l_i-l_k\leqq n-l_2$，(否则,以$m-1$代替$m$，条件(2.6)仍能成立,但这与$m$的极小性质相违),推出$|\partial X|=|V_k\cap\partial X|+|(V_i\cup V_0\cup V_j)\cap\partial X|\geqq(n-\lambda_0(X))+n\geqq n+l_3$；若$|V_i\cap\partial X|<l_i$且$|V_k\cap\partial X|\geqq l_k$，或$|V_i\cap\partial X|\geqq l_i$，$|V_k\cap\partial X|\geqq l_k$且$|q(V_i\cap X)|=n$，则$|\partial X|=|V_k\cap\partial X|+|(V_i\cup V_0\cup V_j)\cap\partial X|\geqq l_k+n\geqq n+l_3$；若$|V_i\cap\partial X|\geqq l_i$，$|V_k\cap\partial X|\geqq l_k$，且$|q(V_i\cap X)|<n$，$|q(V_k\cap X)|<n$，则亦有$|\partial(V-X)|\geqq l_i+l_k+1+\tau_j(X)\geqq n+l_3$.



(iV) 若对任$i\in J_3$均有$\lambda_i(X)=l_i$，则因m是满足条件(2.6)的最小整数，当$l_3<n/2$时必有$\lambda_0(X)\leqq l_1=n-1-l_2\leqq n-1-l_3$。由此推出$|\partial X|\geqq l_1+l_2+l_3+1=n+l_3$(如果$|q(X)|<n$的话)，或推出$|\partial X|\geqq n+|V_k\cap\partial X|\geqq n+l_3$(如果有$\{1,2,3\}$的某一排列i, j, k使$|(V_i\cup V_0\cup V_j)\cap\partial X|\geqq n$的话)，或推出$|\partial X|\geqq l_1+l_2+l_3+1=n+l_3$(如果$|q(X)|=n$，且对任$\{i,j\}\cap J_3$均有$|(V_i\cup V_0\cup V_j)\cap\partial X|<n$的话。(此时，由m的极小性质可推出$\lambda_0(X)=1$))。其次，当$l_3\geqq n/2$时必有$\lambda_0(X)=1$(否则用$m-1$代替m，条件(2.6)仍成立)，由此推出$|\partial X|\geqq 1+\sum_{i=1}^{3}\min\{l_i,n-1\}\geqq n+l_3$。



综上所述，知无论在何种情形之下(2.7)式均成立。由(2.7)式可推出$B(f)\geqq n+l_3$，由f的任意性又可推出$B(G)\geqq n+l_3$。

(B_2) 当$l_1+l_2+1<n$时，据(B_1)所述结论有$B(G)\geqq B(T_{l_1l_2l_3}\times P_{l_1+l_2+1})\geqq l_1+l_2+l_3+1=\beta(l_1,l_2,l_3,n)$。

(B_3) 当$l_1+l_2+1\geqq n$且$l_1+l_3+1<n$时，令$k_2=n-1-l_1$，据(B_1)的结论有$B(G)\geqq B(T_{l_1k_2l_3}\times P_n)\geqq n+l_3=\beta(l_1,l_2,l_3,n)$。

(B_4) 当$l_1+l_3+1\geqq n$且$l_3<n/2$时，令$k_1=n-1-l_3$，$k_2=k_3=l_3$，据(B_1)所得结论有$B(G)\geqq B(T_{k_1k_2k_3}\times P_n)\geqq n+k_3=n+l_3=\beta(l_1,l_2,l_3,n)$。

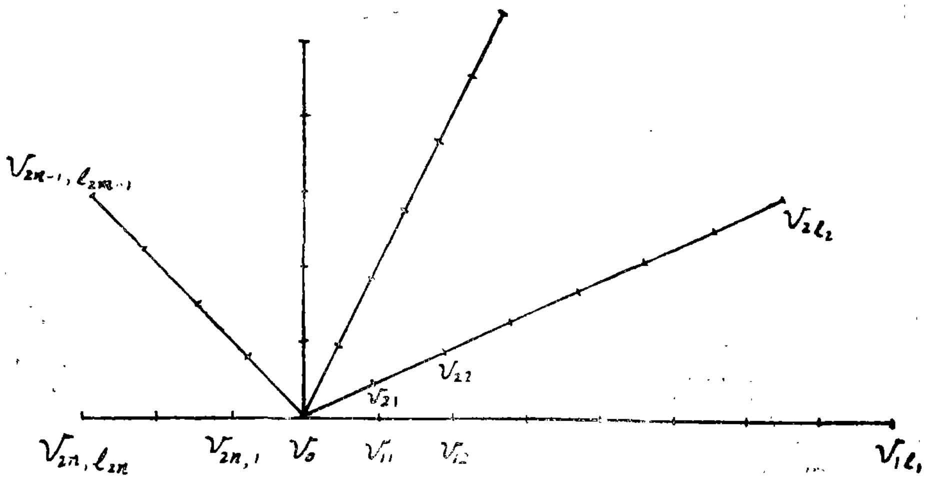
(B_5) 当$l_3\geqq n/2$时，令$k_1=k_2=k_3=\min\{n,l_3\}$，据($B_1$)的结论有$B(G)\geqq B(T_{k_1k_2k_3}\times Pn)\geqq n+k_3=\beta(l_1,l_2,l_3,n)$。

综合(B_1)至(B_5)所述，知无论何种情形均有

$$B(G)\geqq\beta(l_1,l_2,l_3,n)\tag{2.8}$$

由(2.3)及(2.8)式最后推出$B(G)=\beta(l_1,l_2,l_3,n)$。定理2.1证完。

猜测2.1　设$l_1\geqq l_2\geqq\cdots\geqq l_{2n-1}\geqq 1$，$l_{2n-1}\geqq l_{2n}\geqq 0$，树形图$T_{l_1l_2\cdots l_{2n}}$为下图所示



通过给出一个具体的标号不难证明

$$B(T_{l_1l_2\cdots l_{2n}}\times P_n)\leqq\min\{n,\ l_1+l_2+1\}+\sum_{i=2}^{n}\min\{n,l_{2i-1}+l_{2i}\},$$

我们猜测上一式子中的"≦"号可改为等号，但未找到证明的方法。

参　考　文　献

〔1〕Dewdney A. K., The bandwidth of a graph—some recent results, proc. 7th S—E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, (1976) 273—288。

〔2〕Papadimierou C. H., The NP—Completeness of the bandwidth minimization Problem, Computing, 16 (1976) 263—270。

〔3〕Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S. and Knuth D. E., Complexity results for bandwidth minimization, SIAM. J. Appl. Math., 34 (1978) 477—495。

〔4〕Chvátalová J., Optimal labelling of a product of two paths, Discrete Mathematics 11 (1975) 249—253。

〔5〕Harper L. H., Optimal assignments of numbers to vertices, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12 (1964) 131—135。

〔6〕沈韵秋，两条路的强乘积图$P_m\otimes P_n$的带宽，《中国科学技术大学学报》(1980)第四期。

〔7〕李乔，陶懋颀，沈韵秋，环面上格子图$C_m\times C_n$的带宽，《中国科学技术大学学报》(1981)第一期，1—15。

〔8〕罗海鹏，两类乘积图$K_m\times P_n$和$K_m\times C_n$的带宽，《广西大学学报》(1981)第一期。

〔9〕Berge C., Graphs and Hypergraphs (1973) 376—377。

〔10〕麦结华，罗海鹏，关于图的带宽的一些定理，全国第二届图论学术讨论会交流材料(1981)。