DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1987.02.019

系统结构解析中可达性矩阵的计算

罗　海　鹏

（广西计算中心）

摘　要

在区域环境规划、城市规划设计、大型企业计划等这些社会大系统方面，常常希望能够较科学地绘制出系统的结构模型图，使整个系统的因果关系一目了然，能够作为给各级领导和有关专家分析、诊断、规划、决策的参考。系统结构解析方法即是解决这一类问题的较好的方法。

在系统结构解析过程中要通过邻接矩阵计算有向图的可达性矩阵，当处理的问题较复杂，因而矩阵的规模较大时，求可达性矩阵的计算量是非常大的。本文讨论可达性矩阵计算的优化问题。

§1.基本概念

有向图：

图1是有向图的例子，它由顶点①、②、…、⑦和如图所示的7条有向边组成。

邻接矩阵：

图2是图1的有向图的邻接矩阵。这个矩阵的组成是这样的，当有向图的第i个顶点到第j个顶点有一条有向边时，矩阵的第i行第j列的元素为1，否则为0，我们用A表示邻接矩阵。例如，顶点①到顶点⑤有一条有向边，则矩阵的第1行第5列的元素A（1，5）=1；顶点①到顶点②没有有向边，则矩阵的第1行第2列的元素A（1，2）=0。

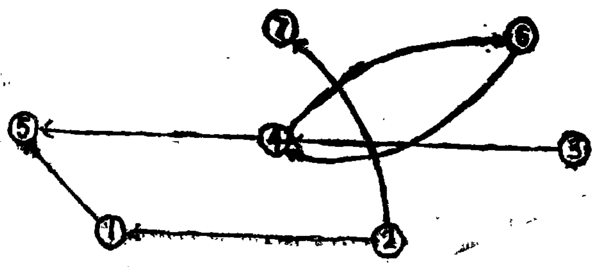

图1

$$A=\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\end{matrix}\\ \left[\begin{matrix}0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{matrix}\right]\end{array}\begin{matrix}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix}$$

图2

单位矩阵：

主对角线上的元素是1，其余元素是0的矩阵（方阵）叫单位矩阵，一般用I表示。图3是7阶的单位矩阵。

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

图3

可达性矩阵：

可达性矩阵的每个元素的值是这样设置的：从第i个顶点出发，按照有向边指定的方向，通过一个有向边或者若干个有向边，可以到达第j个顶点，则第i行第j列的元素是1，否则是0，我们用M表示可达性矩阵。特别规定，每个顶点都被认为是可以到达自己的，即M（i，i）=1。图4是图1的有向图的可达性矩阵。

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\1&1&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

图4

§2.可达性矩阵的计算

单位矩阵I表示了图1的有向图的自身可达的情形，邻接矩阵A表示了图1的有向图的一步可达的情形。

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0\\1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

A^2表示了图1的有向图的两步可达的情形。例如A^2（2，5）=1，即从第2个顶点到第5个顶点两步可达。

注：上面的矩阵乘法采用的是布尔代数的运算法则，即：

$0+0=0$，$0+1=1$，$1+1=1$，$0\times0=0$，$0\times1=0$，$1\times1=1$。

同样，A^3表示了图1的有向图的三步可达的情形，……所以，图1的可达性矩阵

$$M=I+A+A^2+\cdots+A^6。$$

对N+1个顶点的有向图，它的可达性矩阵

$$M=I+A+A^2+\cdots+A^N$$

§3.可达性矩阵计算的优化

一、用A+I代替A

因为

$(A+I)^2=I+A+A^2$,

$(A+I)^3=I+A+A^2+A^3$,

……

$(A+I)^N=I+A+A^2+\cdots+A^N$,

所以我们可用A+I来代替A，用求$(A+I)^N$代替求$I+A+A^2+\cdots+A^N$，这样减少了计算量。

二、用$(A+I)^r$代替$(A+I)^N$($r<=N$)

我们计算$(A+I)^N$，实际上是计算$(A+I)^2$，$(A+I)^3$，……，一直到$(A+I)^r=(A+I)^{r-1}$，就可以不再算下去了，因为这时已经没有新的有向路增加了，故$(A+I)^{r-1}$就是可达性矩阵。

三、用$(A+I)^{2^K}$代替$(A+I)^r$

在求可达性矩阵的计算中，我们不是$(A+I)^2$，$(A+I)^3$，$(A+I)^4$，…这样来计算，而是$(A+I)^2$，$(A+I)^4$，$(A+I)^8$，…这样来计算，以求更快地得到可达性矩阵。

四、矩阵相乘算法优化

程序1：

```
10  FOR I=1 TO N
20  FOR J=1 TO N
30  FOR K=1 TO N
40  M(I, J)=M(I, J)+A(I, K)*A(K, J)
50  NEXT K
60  IF M(I, J)>1 THEN M(I, J)=1
70  NEXT J
80  NEXT I
```

程序2：

```
10  FOR I=1 TO N
20  FOR J=1 TO N
30  IF A(I, J)=1 THEN 70
40  FOR K=1 TO N
50  IF A(I, K)=1 AND A(K, J)=1 THEN M(I, J)=1
    : GOTO 70
60  NEXT K
```

```
70 NEXT J
80 NEXT I
```

程序1是矩阵相乘的一般程序，程序2针对求可达性布尔矩阵的特点对程序1进行了改进：

a、当原矩阵的某元素为1时，可达性矩阵的这个元素一定是1，因此不必重新计算，直接转去处理下一个元素。

b、用条件判断语句代替具体的乘法和加法运算，当被乘数和乘数都为1时，则可达性矩阵中增加一个1，转去处理可达性矩阵的下一个元素。当被乘数和乘数中有一个为0时，则继续往下去判断下一对被乘数和乘数。如果一直到最后都未碰到两个1，则可达性矩阵的这个元素是0。

当矩阵中1较多时，用（a和b）这两种方法运算速度将提高很多。

参考资料

〔1〕汪应洛主编，《系统工程导论》，机械工业出版社，1982年1月。

〔2〕罗海鹏、余昌耀，“系统结构解析方法及程序”，1987年中南地区计算数学与计算机应用学术交流会。

〔3〕张正铀等，《总体规划常用算法与程序》，1987年7月。

THE CALCULATION OF REACHABILITY MATRIX IN SYSTEMATIC STRUCTURE ANALYSIS

Luo Haipeng

(*Guangxi Computation Centre*)

ABSTRACT

The systematic structure analysis method plays an important part in regional overall plan design. The crucial step in this method is calculating the reachability matrix according to the adjacent matrix of directed graph. If the system in research is rather large, this calculation is very time-consuming. This article gives a new method to simplify this calculation and makes it possible for solving rather big problem in small computer.