

关于绕半无限闸墩的流动

黄新民 张旭辉

(广西大学) (南宁市电大)

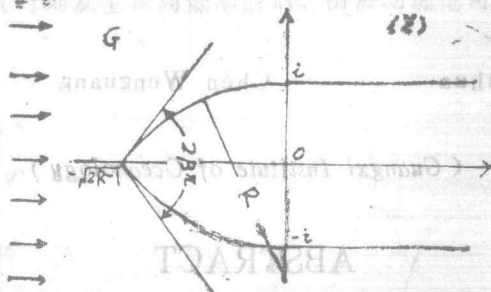
摘 要

许协庆曾研究具有平行边墙的, 头部由圆弧组成的二元半无限闸墩的绕流问题。但该文数学方法似不够严格。

本文用不同的数学方法研究这一流动问题。应用本文提供的方法和公式, 无论闸墩头部夹角为任何值, 均可以理论上精确计算闸墩头部的流速。本文还对文中计算的4个角度重新进行了计算, 以估计文〔1〕计算的误差。

本文用不同的数学方法研究这一流动问题。

我们将半无限闸墩取为右图所示的位置。闸墩外部流速场所占的区域记为 G , 设在无穷远处水流的方向与 x 轴平行。为便于比较, 本文尽量使用文①的记号。



我们将 G 保角映成 $D = \{ |\zeta| > 1 \}$ 。设映射函数为 $z = z(\zeta)$, 满足

$$z(-1) = -\sqrt{2R-1}, \quad z(i) = i, \quad z(-i) = -i,$$

这里 R 为闸墩头部圆弧的半径。已知 R 与闸墩头部夹角 $2\beta\pi$ 之间的关系为

$$\cos\beta\pi = 1 - \frac{1}{R}. \quad (1)$$

由对称性知 $z(1) = \infty$ 。因为 G 的边界均为直线段或圆弧, 由〔2〕知映射函数 $z(\zeta)$ 的 Schwarz 导数

$$\left\{ z(\zeta), \zeta \right\} = \left(\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right)^2$$

可以延拓成除 $\zeta = 1, i, -1, -i$ 外单值解析的函数, 在 $\zeta = \infty$ 至少有三阶零点, 且满足方程

$$\{z(\zeta), \zeta\} = \frac{1-4(1-\beta)^2}{2(\zeta+1)^2} + \frac{d_1}{\zeta+1} + \frac{d_2}{\zeta-i} + \frac{d_3}{\zeta+i} + \frac{-\frac{3}{2}}{(\zeta-1)^2} + \frac{d_4}{\zeta-1},$$

这里 d_1, d_2, d_3, d_4 均是常数. 由于 $\overline{z(\frac{1}{\zeta})} = z(\zeta)$, 易证它们都是实的且 $d_2 = d_3$, 因而上式又可写成

$$\{z(\zeta), \zeta\} = \frac{1-4(1-\beta)^2}{2(\zeta+1)^2} + \frac{d_1}{\zeta+1} + \frac{2d_2\zeta}{\zeta^2+1} + \frac{-\frac{3}{2}}{(\zeta-1)^2} + \frac{d_4}{\zeta-1}. \quad (2)$$

因为 $\zeta = \infty$ 至少为上式左方的三阶零点, 故有

$$\begin{cases} d_1 + 2d_2 + d_4 = 0 \\ d_1 - d_4 = -1 - 2(1-\beta)^2 \\ d_1 - 2d_2 + d_4 = 4 - 4(1-\beta)^2, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1-4(1-\beta)^2}{2} \\ d_2 = -1 + (1-\beta)^2 \\ d_4 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

代入(2)后得

$$\{z(\zeta), \zeta\} = \frac{1-4(1-\beta)^2}{(\zeta^2+1)(\zeta+1)^2} + \frac{3}{(\zeta^2+1)(\zeta-1)^2}. \quad (3)$$

现将 D 保角映射成 $\{t: \text{Im}t > 0 \text{ 且 } |t| < 1\}$, 使 $\zeta = i, 1, -i$ 分别映成 $t = -1, 0, 1$, 映射函数易求出为

$$\zeta(t) = \frac{t^2 - 2it + 1}{t^2 + 2it + 1}. \quad (4)$$

若记 $z(t) = z(\zeta(t))$, 因为 $\{z(t), t\} = \{z(\zeta), \zeta\} \zeta'(t)^2 + \{\zeta(t), t\}$, 因而由(3)及(4)求得

$$\{z(t), t\} = \frac{2(3-2\beta)(1-2\beta)}{(1+t^2)^2} + \frac{-\frac{3}{2}}{t^2} - \frac{6}{(1-t^2)^2}. \quad (5)$$

仿(1)令

$$z'(t) = \frac{m}{2} \frac{(t^2+1)^{1-2\beta} (t^2-1) e^{-\Omega(t)}}{t^3}, \quad (6)$$

$\Omega(t)$ 的意义已在文(1)中作了解析. 由(5)及(6)可得 $\Omega(t)$ 满足的方程为

$$\Omega''(t) + \frac{1}{2} \Omega'(t)^2 + \left(3 + \frac{2t^2}{1-t^2} - \frac{2(1-2\beta)t^2}{1+t^2}\right) \frac{\Omega'(t)}{t} = \frac{4\beta(1-2\beta)}{1+t^2} - \frac{4\beta}{1-t^2}, \quad (7)$$

文(1)中已说明 $\Omega(t)$ 可以开拓成为 $\{|t| < 1\}$ 中的解析函数且可设为

$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{2n}$$

(为简单起见这里的 a_n 相当于(1)中的 a_{2n} 。 $\Omega(t)$ 的上述性质亦可通过解析开拓直接证明)。由(7)式及 $\frac{4\beta(1-2\beta)}{1+t^2} - \frac{4\beta}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4\beta [(-1)^n(1-2\beta) - 1] t^{2n}$ 可得 a_n 的递推公式

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(n+1-k)a_k a_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} [1 + (-1)^{k-1}(1-2\beta)] (n-k)a_{n-k} = \beta [(-1)^n(1-2\beta) - 1] \quad (8)$$

由(8)式计算出

$$a_1 = -\beta^2,$$

$$a_2 = -\frac{\beta}{12} (\beta^3 - 4\beta^2 - 4\beta + 4),$$

$$a_3 = -\frac{\beta^2}{12} (\beta^4 - (\beta^3 + 4\beta^2 + 24\beta - 8)),$$

$$a_4 = -\frac{\beta}{360} (\beta^7 - 8\beta^6 + 14\beta^5 + 28\beta^4 - 76\beta^3 - 32\beta^2 + 16\beta + 12),$$

$$a_5 = -\frac{\beta^2}{21600} (13\beta^8 - 130\beta^7 + 360\beta^6 + 240\beta^5 - 2196\beta^4 + 1080\beta^3 + 3440\beta^2 + 160\beta - 672).$$

再往下的表达式过于复杂，还不如用递推公式直接由(8)式计算更简便。用本文的公式计

表1 系数 a_n 的误差比较

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	
β									
$\frac{1}{2}$	I	-0.2545	-0.0451	-0.0142	-0.0069	-0.0036	-0.0025	-0.0016	-0.0020
	II	-0.2500	-0.04688	-0.01497	-0.00635	-0.00322	-0.00184	-0.00115	-0.00076
	III	1.8%	3.8%	5.1%	8.7%	11.8%	35.9%	39.1%	
$\frac{1}{3}$	I	-0.0946	-0.0741	0.0033	-0.0151	0.0036	-0.0021	0.0009	-0.0027
	II	-0.1111	-0.06276	-0.00036	-0.01051	0.00114	-0.00368	0.00129	-0.00380
	III	14.9%	18.1%		43.7%		42.9%	30.2%	28.9%
$\frac{2}{9}$	I	-0.0432	-0.0570	0.0036	-0.0085	0.0010	-0.0023	-0.0002	-0.0008
	II	-0.04938	-0.05416	0.0017	-0.00816	0.00105	-0.00222	0.00054	-0.00128
	III	12.5%	5.2%		4.2%	4.8%	3.6%		37.5%
$\frac{1}{6}$	I	-0.0246	-0.0464	0.0023	-0.0066	0.0004	-0.0019	-0.0005	-0.0008
	II	-0.02778	-0.04482	0.00151	-0.00623	0.00070	-0.00196	0.00035	-0.00106
	III	11.4%	3.5%	52.3%	5.9%	42.9%	3.1%		24.5%

算得到的系数 a_n 的值是理论上的准确值。此因可以对文〔1〕中计算的值进行比较（见表1）。其中有I的那一行是文〔1〕的计算结果，II的那一行是本文的计算结果，但四舍五入到小数点后第5位，III的那一行为误差的百分比，但大于100%者不列）。

通过比较可见，文〔1〕的计算能反映出 a_n 随 β 的变化而变化的规律。但在定量计算上除去 $\beta = \frac{1}{2}$ 外则符合得不太好。

现在计算 $\frac{m}{R}$ 的准确值。由（6）式得

$$m = -2 \lim_{t \rightarrow 0} t^2 z'(t)。$$

我们现在计算极限（9）。函数

$$\omega = i \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$$

将D保角映射成上半 ω 平面， $\xi = 0$ 映成 $\omega = 0$ 而弧 $\{\xi : |\xi| = 1 \text{ 且 } \text{Im} \xi < 0\}$ 映成 ω 平面上正实轴，而弧 $\{\xi : |\xi| = 1 \text{ 且 } \text{Im} \xi > 0\}$ 映成 ω 平面上负实轴。因而在弧段 $\{\xi : |\xi| = 1, \text{Re} \xi > 0 \text{ 且 } \xi \neq 1\}$ 上我们有

$$\text{Im} \left\{ z(\xi) - \left[\frac{2}{\pi} \log \left(i \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) - i \right] \right\} = 0,$$

这里 $\log \left(i \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right)$ 我们是取 $\xi > 1$ 时虚部为 $\frac{\pi}{2}$ 的分支。函数 $z(\xi) - \left[\frac{2}{\pi} \log \left(i \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) - i \right]$ 在 $|\xi| > 1$ 中是单值解析的，因此它可以开拓成 $0 < |\xi - 1| < \sqrt{2}$ 中的单值解析函数而以 $\xi = 1$ 为其孤立奇点。若记

$$z(\infty) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} z(\xi), \quad r = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi (z(\xi) - z(\infty)),$$

则函数

$$\frac{z\left(\frac{1}{\xi}\right) - z(\infty)}{r} = \xi + \sum_{n=2}^{\infty} c_n \xi^n$$

是 $\{|\xi| \leq 1\}$ 中单叶且规范化（指在 $\xi = 0$ 取值为零而导数值为1）的解析函数。由〔2〕知

$$\left| \frac{z\left(\frac{1}{\xi}\right) - z(\infty)}{r} \right| \leq \frac{|\xi|}{(1 - |\xi|)^2}$$

因此

$$\left| \frac{z(\xi) - z(\infty)}{r} \right| \leq \frac{|\xi|}{(1 - |\xi|)^2}$$

由上式易证 $\xi = 1$ 至多为 $z(\xi) - \left[\frac{2}{\pi} \log \left(i \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) - i \right]$ 的二阶极点。但由

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 1 \\ |\xi| = 1}} \left(z(\xi) - \left[\frac{2}{\pi} \log \left(i \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) - i \right] \right) = +\infty$$

知道 $\xi = 1$ 必须为 $z(\xi) - \left[\frac{2}{\pi} \log \left(i \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) - i \right]$ 的二阶极点。因而我们可设在

$0 < |\zeta - 1| < \sqrt{2}$ 中成立

$$z'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\beta) (\zeta - 1)^{n-3}, \quad (10)$$

其中 $b_0(\beta) \neq 0$ 而 $b_2(\beta) = \frac{2}{\pi}$ 。由上式代入(3)式, 比较两方在 $\zeta = 1$ 的 Laurent 展式的系数, 就可以求出

$$b_0(\beta) = \frac{16b_2(\beta)}{2\beta - \beta^2} = \frac{32}{(2\beta - \beta^2)\pi}$$

因而由(10)式得

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} (\zeta - 1)^3 z'(\zeta) = \frac{32}{(2\beta - \beta^2)\pi}$$

再由(4)式得

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{(\zeta(t) - 1)^3} = \frac{1}{(-4i)^3}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \zeta'(t) = -4i,$$

因而极限(9)为

$$m = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{(\zeta(t) - 1)^3} \cdot \lim_{\zeta \rightarrow 1} (\zeta - 1)^3 z'(\zeta) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \zeta'(t) = \frac{4}{(2\beta - \beta^2)\pi}$$

由(1)便得

$$\frac{m}{R} = \frac{4(1 - \cos\beta\pi)}{(2\beta - \beta^2)\pi}$$

对4个 β 值计算的结果与文①的比较情形如下表, 表中 I, II, III 的意义同表1。

表2 $\frac{m}{R}$ 值的比较

β		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{m}{R}$	I	1.704	1.227	0.843	0.596
	II	1.69765726	1.14591559	0.7540124626	0.558267558
	III	3.7%	7.1%	11.8%	6.8%

显然, 文①对 $\frac{m}{R}$ 值的计算精度是比较好的。

参 考 文 献

- [1] 许协庆 绕半无限闸墩流动的压力分布和初生空穴数, 水利学报, 3(1962), 9—21。
- [2] 闻国椿 共形映射与边值问题, 高等教育出版社, 1985年, 55—94。

ON POTENTIAL FLOW AROUND SEMI-INFINITE GATE PIERS

Huang Xinmin

Guangxi University

Zhang Wenguang

Nanning Television University

ABSTRACT

Potential flow around semi-infinite gate piers bounded from two parallels and head part formed by two circular arcs has been analysed by Hsu Hsie-ting. But its mathematical method was nonrigorous and lacked of theoretical proof on validity of computation, so it needs to be checked by test.

In this paper we discuss the same problem of flow by using another mathematical method. With the method and formulas in this paper, it is possible to calculate theoretical velocity of arbitrary angle of head part of gate piers with great precision but little effort. The coefficients and parameters under four angles of head part were calculated in the preceding paper are recalculated in this paper and the solutions are accurate.