DOI:10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1994.01.017

第10卷第1期 广西科学院学报 Vol. 10, No. 1
1994年5月 Journal of the Guangxi Academy of Sciences May, 1994

变系数非线性系统的零解的一致稳定性

麦结华　　席鸿建
（广西大学数学系　南宁　　530004）

摘要　构造出一类广泛的指数函数乘二次函数的 Liapunov 函数，讨论了变系数非线性系统的一致稳定性.

关键词　变系数非线性系统　Liapunov 函数　一致稳定性

在 Liapunov 稳定性理论中，一个核心问题是如何构造合适的 Liapunov 函数. 对于变系数的系统而言，寻求直接由方程组右端系数表示的二次型函数是一个十分引人注目的研究课题. 不少文章在这方面作了讨论和推广. 文献〔1, 2〕应用指数函数乘二次型的 Liapunov 函数考虑了变系数的齐次系统零解的稳定性. 本文将考虑如下的 n 阶非线性系统（n≥1）：

$$\dot{x}_i = \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_{ij}(x_j) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

其中 a_{ij}, f_{ij} 均是实轴 $\mathscr{R}$ 上的连续函数，并且

$$f_{ij}(0) = 0 \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

为研究 $f_{ij}(x) = x$ 时系统（1）的零解的稳定性，文〔1〕构造了形如

$$V = V(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = e^{\varphi(t)} \Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{3}$$

的 Liapunov 函数. 本文将考虑更广泛的 Liapunov 函数，并以此为工具得到更为广泛和简明的稳定性判据.

对 $\mathscr{R}$ 或 $\mathscr{R}^+ = [0, \infty)$ 上的 C^1—函数 $\varphi(t), C_1(t), \cdots, C_n(t)$，以及上述函数 $a_{ij}(t), f_{ij}(t)$，本文通令

$$\begin{aligned} W_{\varphi c_1 \cdots c_n}(t, x_1, \cdots, x_n) &= \varphi'(t) \Sigma_{i=1}^{n} C_i(t) x_i^2 \\ &+ \Sigma_{i=1}^{n} C'_i(t) x_i^2 + 2\Sigma_{i=1}^{n} \Sigma_{j=1}^{n} C_i(t) x_i a_{ij}(t) f_{ij}(x_j) \end{aligned} \tag{4}$$

引理 1　若存在 $\mathscr{R}^+$ 上的 C'—函数 $\varphi(t)$, $C_1(t)$, …, $C_n(t)$ 及 $\mathscr{R}^+$ 上原点的某一邻域 U 以及实数 $\varepsilon > 0$，使得

a) $\inf\limits_{t \geq 0} e^{\varphi(t)} C_i(t) \geq \varepsilon$ 　　$(i=1, 2, \cdots, n)$

b) $W_{\varphi c_1 \cdots c_n}(t, x_1, \cdots, x_n) \leq 0$（对任 $t \in R^+$ 及 $(x_1, \cdots, x_n) \in U$）

那么，系统（1）的零解一致稳定.

证：作 $\mathscr{R}^n \times \mathscr{R}^+$ 上的 Liapunov 函数 $V = V_{\varphi, c_1 \cdots c_n}$ 为

$$V(t, x_1, \cdots, x_n) = V_{\varphi c_1 \cdots c_n}(t, x_1, \cdots, x_n) = e^{\varphi(t)} \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i^2 \tag{5}$$

则 V 沿（1）的解曲线对 t 的微商为

$$\dot{V}(t, x_1, \cdots, x_n)|_{(1)} = e^{\varphi(t)} W_{\varphi c_1 \cdots c_n}(t, x_1, \cdots, x_n) \tag{6}$$

1992-10-26 收稿。

由条件（b）及（6）式知V在（1）的任一解曲线上均是t的递减函数.由条件(a)知对$\mathscr{R}^n$中任一个不含原点的闭集X，在$\mathscr{R}^+\times$ X上V（t，x_1，…，x_n）有一个正的下确界．而V（t，0，…，0）＝0，且V看作（x_1，…，x_n）的函数时，在原点的邻域内对$t\in\mathscr{R}^+$一致连续．因此，当初值$x^0=$（x_1^0，x_2^0，…，x_n^0）充分接近原点时，从x^0出发的解曲线也总在原点的邻域内．这就表明系统（1）的零解是一致稳定的．

证毕

下面，我们总令

$$\bar{a}_{ii}(t)=max\{a_{ii}(t),0\}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

文献〔2，3〕在讨论系统稳定性时，总要求$a_{ii}(t)\leqslant 0$（任$t\in\mathscr{R}^+$），本文将放松这一要求．

定理1 若存在实数$N>1>\delta>0$，使如下两条件成立：

（c）$|f_{ij}(x)|<N|x|$且$xf_{ii}(x)\geqslant 0$对任$x\in[-\delta,\delta]$及任i，$j=1$，2，…，n.

（d）$\int_0^\infty[\Sigma_{i=1}^n\bar{a}_{ii}(t)+\Sigma_{i,j=1}^n|a_{ij}(t)|]dt<\infty$

则系统（1）的零解一致稳定．

证：令$c_1=c_2=\cdots=c_n=1$，$U=[-\delta,\delta]^n$

$$\varphi(t)=-2N\int_0^t\{\Sigma_{i=1}^n\bar{a}_{ij}(t)+\Sigma_{i,j=1}^n|a_{ij}(t)|\}dt \tag{8}$$

由于条件（d）成立，故存在$M>0$，使$|\varphi(t)|\leqslant M$对任$t\in\mathscr{R}^+$成立，从而引理1中条件（a）成立．把$\varphi'(t)$的值

$$\varphi'(t)=-2N\{\Sigma_{i=1}^n\bar{a}_{ij}(t)+\Sigma_{i,j=1,i\neq j}^n|a_{ij}(t)|\} \tag{9}$$

代入（4）中，据条件（c），对$t\in\mathscr{R}^+$及（x_1，…，x_n）$\in U$，有

$$\begin{aligned}W_{\varphi c_1\cdots c_n}(t,x_1,\cdots,x_n)&=2\Sigma_{i=1}^n\Sigma_{j=1}^n a_{ij}(t)x_if_{ij}(x_j)\\&-2N\{\Sigma_{i=1}^n\bar{a}_{ii}(t)+\Sigma_{i=1}^n\Sigma_{j\neq i}^n|a_{ij}(t)|\}\cdot\Sigma_{i=1}^n x_i^2\\&\leqslant\Sigma_{i=1}^n 2\bar{a}_{ii}(t)(x_it_{ii}(x_i)-Nx_i^2)\\&+\Sigma_{i=1}^n\Sigma_{j\neq i}^n 2|a_{ij}(t)|\cdot\{x_if_{ij}(x_j)-N(x_i^2+x_j^2)\leqslant 0\end{aligned}$$

因此，据引理1知系统（1）的零解一致稳定．

证毕

由定理1易得如下

推论1 若系统（1）满足如下条件

（e）$a_{ii}(t)\leqslant 0$，(任$t\in\mathscr{R}$及$i=1$，2，…，n)

（f）$\int_0^\infty\Sigma_{i,j=1,i\neq j}^n|a_{ij}(t)|dt<\infty$

（g）$xf_{ii}(x)\geqslant 0$且$|f_{ij}(x)|\leqslant N|x|$（对任$x\in[-\delta,\delta]$

及i，$j=1$，2，…n)．

则系统（1）的零解一致稳定．

定理2 若在系统（1）中，当$i\neq j$时$f_{ij}(x)\equiv x$,并且存在着$\mathscr{R}^+$上的C'—函数$C_1(t),\cdots,C_n(t)$,及实数$N>1>\varepsilon>0$,使

(h)$0\leqslant xf_{ii}(x)\leqslant Nx^2$(对任$x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$及$1\leqslant i\leqslant n$).

(I)对于$\varphi(t)=-\dfrac{4N}{\varepsilon}\int_0^t\{\Sigma_{i=1}^n\bar{a}_{ii}(s)+\Sigma_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|C_i(s)a_{ij}(s)+C_j(s)a_{ji}(s)|\}ds\quad(t\in\mathscr{R}^+)$

引理 1 中条件(a)成立.

(j) $C'_k(t)\leqslant N\{\Sigma_{i=1}^{n}\bar{a}_{ii}(t)+\Sigma_{1\leqslant i<j\leqslant n}|C_i(t)a_{ij}(t)+C_j(t)a_{ji}(t)|\}$对任 $t\in\mathscr{R}^+$，$k=1, 2, \cdots, n$).

则系统（1）的零解一致稳定.

证：取 $U=[-\varepsilon, \varepsilon]^n$，把 $\varphi'(t)$的值

$$\varphi'(t)\leqslant-\frac{4N}{\varepsilon}\{\Sigma_{i=1}^{n}\bar{a}_{ii}(t)+\Sigma_{1\leqslant i<j\leqslant n}|C_i(t)a_{ij}(t)+C_j(t)a_{ji}(t)|\} \tag{10}$$

代入（4）中，据条件（h）及（j）可知，对 $t\in\mathscr{R}^+$及（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）$\in U$ 均有

$$\begin{aligned}W_{\varphi c_1\cdots c_n}(t,x_1,\cdots,x_n)\leqslant&\sum_{k=1}^{n}\{C'_k(t)-\sum_{i=1}^{n}N\bar{a}_{ii}(t)-\Sigma_{1\leqslant i<j\leqslant n}N|C_i(t)a_{ij}(t)\\&+C_j(t)a_{ji}(t)|\}x_k^2+\Sigma_{i=1}^{n}2\bar{a}_{ii}(t)C_i(t)\{x_if_{ii}(x_i)-Nx_i^2\}\\&+\Sigma_{1\leqslant i<j\leqslant n}2|C_i(t)a_{ij}(t)+C_j(t)a_{ji}(t)|\cdot(|x_ix_j|-x_i^2-x_j^2)\leqslant 0\end{aligned}$$

因此，据引理 1 知系统（1）的零解一致稳定.

证毕

推论 2 若在系统（1）中，当 $i\neq j$ 时，$f_{ij}(x)\equiv x$，并且存在$\mathscr{R}^+$上的 C'—函数 $C_1(t)$，$\cdots$，$C_n(t)$ 及实数 $N>1>\varepsilon>0$，使 $\varepsilon\leqslant C_i(t)\leqslant N$（对任 $t\in\mathscr{R}^+$及 $1\leqslant i\leqslant n$). 及如下三个条件成立：

(k) $0\leqslant xf_{ii}(x)\leqslant Nx^2$（对任 $x\in[-\varepsilon, \varepsilon]$ 及 $1\leqslant i\leqslant n$).

(l) $\int_0^{\infty}\{\Sigma_{i=1}^{n}\bar{a}_{ii}(t)+\Sigma_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|C_i(t)a_{ij}(t)+C_j(t)|a_{ji}(t)\}dt<\infty$

(m)$C'_k(t)\leqslant N\{\Sigma_{i=1}^{n}\bar{a}_{ii}(t)+\Sigma_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|C_i(t)a_{ij}(t)+C_j(t)a_{ji}(t)|\}$

（对任 $t\in\mathscr{R}^+$，$k=1, 2, \cdots, n$）

则系统（1）的零解一致稳定.

证明 令 $\varphi(t)=-\frac{4N}{\varepsilon}\int_0^t\{\Sigma_{i=1}^{n}\bar{a}_{ii}(s)+\Sigma_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|C_i(t)a_{ij}(s)+C_j(s)a_{ji}(s)|\}ds$

则对于给定的 $C_i(t), i=1,2\cdots,n$,与 $\varphi(t)$，引理 1 的条件（a）得以满足，由定理 2 知，系统（1）的零解一致稳定. 证毕

参考文献

1 雷 明. 变系数线性系统的稳定性. 辽宁大学学报，1987. 3

2 冯春华，韦忠辉. 变系数系统的稳定性. 广西科学院学报，1993，9（1）.

3 秦元勋，王联，王慕秋. 缓变系数动力系统的运动稳定性. 中国科学，专辑（I）. 1979.

On the Stability of the Nonlinear Systems with Varying Coefficients

Mai Jiehua Xi Hongjian

(Guangxi University, Nanning)

Abstract The Liapunov functions of exponential function multiplied by quadradic form is constructed and the stability of the nonlinear systems of differential equations with varying coefficients is also discussed.

Key words nonlinear systems with varying coefficients, Liapunov function, stability