

植物种群灰色-马尔柯夫模型的初步研究

A Preliminary Study on Grey-Markov Model of Plant Population

梁士楚
Liang Shichu

(广西红树林研究中心 北海 536000)
(Guangxi Mangrove Research Center, Beihai, 536000)

摘要 探讨植物种群灰色-马尔柯夫模型的理论和方法。对日本落叶松人工种群的密度的自然变化过程模拟和预测,表明灰色-马尔柯夫模型是一种较为理想的种群动态模型。

关键词 植物种群 灰色-马尔柯夫模型 数量动态

Abstract The theory and method of Grey-Markov model of plant population and its application in the imitation and prediction of the natural thinning of Japanese larch artificial population were studied. The results show that the Grey-Markov model is more effective and convenient than the other models.

Key words plant population, Grey-Markov model, quantitative dynamics

植物种群在时间序列上的数量表征是植物种群的重要特征,是植物种群生态学研究的重点和目的。生长在特定环境空间里的任何植物种群都有随时间过程而呈现个体数量变化的生命现象。因此,弄清植物种群的数量分布及其消长规律,对植物种群资源的合理开发和利用等具有重要意义。描述植物种群数量变动的数量模型较多,如 Logistic 增长模型、Leslie 矩阵模型、GM (1, 1) 模型等^[1~3],它们根据种群的生长发育状况及其数量动态趋势,从不同的角度论述了植物种群随时间变化的数量特征,方法和效果的优劣各一。本文将灰色系统理论与马尔柯夫理论相结合,通过对植物种群个体数量的时序分析来模拟和预测植物种群的自然动态过程,探索一种定量地描述植物种群数量动态的新方法。

1 建模的原理及过程

1.1 GM (1, 1) 模型

GM (1, 1) 模型是灰色模型 (Grey model) 中的一种特例模型,即为 1 阶一个变量的微

分方程模型^[4,5]。建立 GM(1, 1) 只需一个数列 $\{X^{(0)}(t)\}$, 就可以求得模拟和预测用的微分方程。

设给定的实测数据时间序列为:

$$\begin{aligned} X^{(0)}(t) &= \{X^{(0)}(t) | t = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \dots, X^{(0)}(n)\} \end{aligned}$$

对实测数据时间序列 $\{X^{(0)}(t)\}$ 进行一次累加生成运算(1-AGO):

$$\begin{aligned} X^{(1)}(t) &= \sum_{n=1}^t X^{(0)}(n) \\ X^{(1)}(t) &= \{X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), X^{(1)}(3), \dots, X^{(1)}(n)\} \\ &= \{X^{(0)}(1), X^{(1)}(1) + X^{(0)}(2), X^{(1)}(2) + X^{(0)}(3), \dots, X^{(1)}(n-1) + X^{(0)}(n)\} \end{aligned} \quad (1)$$

利用 GM(1, 1) 模型来模拟和逼近生成处理后的时间数据序列 $X^{(1)}(t)$, 其相应的微分方程为:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = u \quad (2)$$

记 a, u 为参数向量 \hat{a} 的元素:

$$\hat{a} = [a, u]^T \quad (3)$$

向量参数采用最小二乘法求解:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_N \quad (4)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(X^{(1)}(2) + X^{(1)}(1)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}(3) + X^{(1)}(2)) & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}(n) + X^{(1)}(n-1)) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_N = [X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \dots, X^{(0)}(N)]^T$$

由此求得时间响应函数(初步预测方程):

$$\hat{X}^{(1)}(t+1) = [X^{(0)}(1) - \frac{u}{a}]e^{-at} + \frac{u}{a} \quad (5)$$

$$\hat{X}^{(0)}(t+1) = \hat{X}^{(1)}(t+1) - \hat{X}^{(1)}(t) \quad (6)$$

$$\text{令 } \hat{y}(t) = \hat{X}^{(0)}(t+1)$$

1.2 状态的划分

符合 n 阶马尔柯夫非平稳随机序列 $y(t)$ 的任一状态 E_i 可表示为:

$$E_i \in [\otimes_{1i}, \otimes_{2i}]$$

$$\otimes_{1i} = \hat{y}(t) + A_i \quad (7)$$

$$\otimes_{2i} = \hat{y}(t) + B_i \quad (8)$$

$\hat{y}(t)$ 是一个时间函数, 故灰元 \otimes_{1i} 和 \otimes_{2i} 随时序发生变化。

1.3 状态转移概率矩阵

马尔柯夫过程 $\{X(n)\}$ 经过 k 步转移后, 其状态转移概率 $P_{ij}^{(k)}$ 组成的矩阵为:

$$P^{(k)} = \begin{Bmatrix} P_{11}^{(k)} & P_{12}^{(k)} & \dots & P_{1n}^{(k)} \\ P_{21}^{(k)} & P_{22}^{(k)} & \dots & P_{2n}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}^{(k)} & P_{n2}^{(k)} & \dots & P_{nn}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

系统各种状态转移的统计规律通常在状态转移概率 $P_{ij}^{(1)}$ 中得到体现。通过考察状态转移概率矩阵 $P^{(1)}$ ，就可以预测系统的发展。若考察一步转移概率难以确定系统的转向时，再考察二步甚至多步转移概率矩阵来确定系统的转向。

1.4 模拟和预测

系统状态转移确定后，也就确定了灰元 \otimes_{1i} 和 \otimes_{2i} ，由此得到系统的模拟值和预测值为：

$$\hat{y}'(t) = \frac{1}{2}(\otimes_{1i} + \otimes_{2i}) = \hat{y}(t) + \frac{1}{2}(A_i + B_i) \quad (10)$$

2 实例研究

选择日本落叶松 (*Larix kaempferi*) 人工种群为研究对象，对其种群密度的自然动态过程进行模拟和预测。

2.1 种群密度的 GM (1, 1) 模型

表 1 是不同林龄的日本落叶松人工种群的密度，根据 GM (1, 1) 模型的建模原理和方法，求得的日本落叶松人工种群密度的时间响应函数^[6]为：

$$\hat{X}^{(1)}(t+1) = 72195.27544 e^{-0.04193898307t} + 75295.27544$$

$$\hat{X}^{(0)}(t+1) = 3027.796429 e^{-0.04193898307t}$$

令 $\hat{y}(t) = \hat{X}^{(0)}(t+1)$ ，则有

$$\hat{y}(t) = 3027.796429 e^{-0.04193898307t}$$

2.2 种群密度状态的划分及其转移概率矩阵

根据日本落叶松人工种群密度的分布状况，可将其划分为 4 个状态 (图 1)：

$$E_1: \otimes_{11} = \hat{y}(t) - 0.066588748\bar{y}$$

$$\otimes_{21} = \hat{y}(t) - 0.022325983\bar{y}$$

$$E_2: \otimes_{12} = \hat{y}(t) - 0.022325983\bar{y}$$

$$\otimes_{22} = \hat{y}(t)$$

$$E_3: \otimes_{13} = \hat{y}(t)$$

$$\otimes_{23} = \hat{y}(t) + 0.022325983\bar{y}$$

$$E_4: \otimes_{14} = \hat{y}(t) + 0.022325983\bar{y}$$

$$\otimes_{24} = \hat{y}(t) + 0.066588748\bar{y}$$

式中， $\hat{y}(t)$ 为 t 时刻由 GM (1, 1) 模型测得的不同林龄日本落叶松人工种群的密度的模拟值或预测值， \bar{y} 为不同林龄的日本落叶松人工种群的平均密度。

一般地，根据状态转移概率 $P_{ij}^{(1)}$ 就可以建立马尔柯夫模型，而 $P_{ij}^{(1)}$ 是由式 (11)

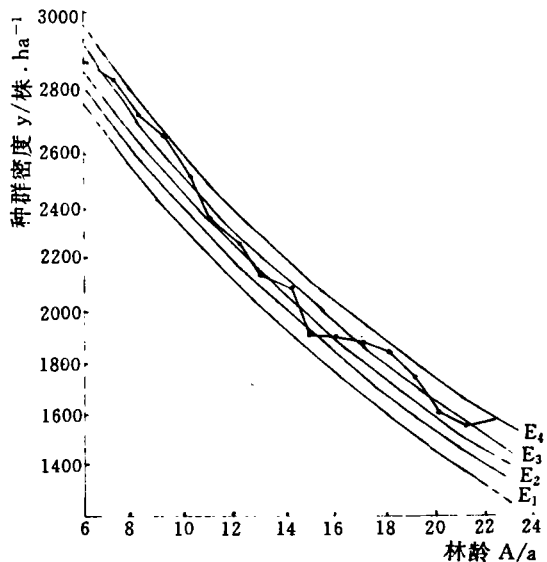


图 1 日本落叶松人工种群的密度状态

表 1 不同林龄的日本落叶松人工种群的密度

林龄 (a)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
种群密度 (株/hm ²)	3100	3000	2873	2787	2620	2473	2357	2247	2170	2070	1997	1967	1883	1917	1693	1680	1673

计测:

$$P_{ij}^{(1)} = M_{ij}(1) / M_i \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

式中, $M_{ij}(1)$ 为由状态 E_i 直接转移到状态 E_j 的样本数, M_i 为处于 E_i 的样本数。

由此根据式(9)和式(11)计算得到的日本落叶松人工种群密度的状态转移概率矩阵 $P^{(1)}$ 为:

$$P^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 1/7 & 2/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 2/8 & 6/8 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

2.3 种群密度的模拟和预测

日本落叶松人工种群密度的模拟和预测是由式(10)和式(12)确定的。如由图1可知, 林龄22年的日本落叶松人工种群处于 E_4 状态, $P_{max} = P_{44}^{(1)}$, 因此, 预测林龄23年的日本落叶松人工种群的密度最有可能处于 E_4 状态(图1), 即在 1535 株/hm²~1635 株/hm²。根据式(10)计测得到的林龄23($t=17$)年的日本落叶松人工种群的密度的预测值为:

$$\hat{y}(17) = \frac{1}{2}(\otimes_{14} + \otimes_{24}) = \hat{y}(17) + \frac{1}{2}(0.022325983\bar{y} + 0.066588748\bar{y}) = 1585 \text{ (株/hm}^2\text{)} \quad (13)$$

根据上述方法计算得到的其它林龄的日本落叶松人工种群密度的模拟和预测值如表2所示。从表2结果分析可知, 日本落叶松人工种群密度的模拟值和实际值十分贴近, 而预测值的递减加速度为负值, 完全符合植物种群发展的自然规律。

2.4 种群模型的精度分析

利用灰色-马尔柯夫模型对原始数列 $\{X^{(0)}(t)\}$ 拟合, 求得的模型计算值 $\{\hat{X}^{(0)}(t)\}$, 用来作原始数列随时间变化的预测值时, 应对模型的精度和可信程度进行检验, 这里采用后验差进行检验^[4]。

设 $q(t)$ 为 t 时刻的残差:

$$q(t) = X^{(0)}(t) - \hat{X}^{(0)}(t) \quad (14)$$

对实测数据 $X^{(0)}(t)$, $t=1, 2, \dots, n$, 求平均值 \bar{X} 和方差 S_1^2 :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X^{(0)}(t) \quad (15)$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X^{(0)}(t) - \bar{X})^2 \quad (16)$$

对残差 $q(t)$, $t=1, 2, \dots, n$, 求平均值 \bar{q} 和方差 S_2^2 :

表2 日本落叶松人工种群密度的模拟和预测值

林龄 (a)	$X^{(0)}(t)$	GM(1, 1) 模型			灰色-马尔柯夫模型		
		$\hat{X}^{(0)}(t)$	精度%	精度差值	$\hat{X}^{(0)}(t)$	精度%	精度差值
6	3100	3100	100.00		3100	100.00	
7	3000	2965	98.83	0.0117	3003	100.10	0.0010
8	2873	2843	98.96	0.0104	2884	100.41	0.0041
9	2787	2727	97.85	0.0215	2770	99.40	0.0060
10	2620	2615	99.81	0.0020	2660	101.55	0.0155
11	2473	2507	101.38	0.0138	2480	100.29	0.0029
12	2357	2404	101.99	0.0199	2379	100.95	0.0095
13	2247	2305	102.58	0.0258	2232	99.35	0.0065
14	2170	2219	102.25	0.0225	2190	100.92	0.0092
15	2070	2120	102.42	0.0242	1975	95.43	0.0457
16	1997	2033	101.80	0.0180	2016	100.94	0.0094
17	1967	1949	99.08	0.0093	2009	102.15	0.0250
18	1883	1869	99.26	0.0074	1930	102.54	0.0254
19	1917	1793	93.53	0.0647	1856	96.80	0.0319
20	1693	1719	101.54	0.0154	1708	100.91	0.0091
21	1680	1648	98.10	0.0190	1639	97.58	0.0242
22	1673	1581	94.50	0.0550	1648	98.52	0.0148
23		1516			1585		
24		1454			1524		

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n q(t) \quad (17)$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (q(t) - \bar{q})^2 \quad (18)$$

后验差检验的两个主要的指标是后验差比值 C 和小误差频率 P :

$$C = S_2/S_1 \quad (19)$$

$$P = P \{ |q(t) - \bar{q}| < 0.6745S_1 \} \quad (20)$$

后验差检验的精度评价标准如表3所示。

表3 精度评价标准

精度等级	P	C
好	≥ 0.95	≤ 0.35
合格	≥ 0.80	≤ 0.50
勉强	≥ 0.70	≤ 0.65
不合格	< 0.70	> 0.65

根据式(14)~(20),求得灰色-马尔柯夫模型的后验差检验情况如表4所示。由表4可知,采用灰色-马尔柯夫模型对日本落叶松人工种群密度进行模拟和预测,其精度不仅好,而且可信,表2中的精度百分率及其差值亦说明了这一点。此外,由表2和表4还可知,与GM(1, 1)模型相比较,

表 4 灰色-马尔柯夫模型的精度评价

数据类型	\bar{X}	S^2	C	P	精度评价
$X^{(0)}(t)$	2265.1176	222015.8603			
GM(1,1)模型, $q(t)$	6.4706	2751.5147	0.1113	1.0000	好, 可信
灰色-马尔柯夫模型, $q(t)$	7.1765	1369.5294	0.0785	1.0000	好, 可信

灰色-马尔柯夫模型比 GM (1, 1) 模型具有更高的精度。

3 讨论

灰色系统理论是研究解决灰色系统分析、建模、预测、决策和控制的理论, 是 80 年代初由我国学者邓聚龙提出并发展的。这个理论在工农业生产、灾害预测、生态和经济发展趋势等许多领域都获得了成功的应用^[3~6]。植物种群系统可作为一个灰色系统, 对其实测的数据-时间序列进行随机性弱化处理后, 用微分方程来拟合其生成系列, 而得到的一类植物种群增长的动态模型称为 GM 模型。其中, GM (1, 1) 模型已被用来模拟和预测植物种群的自然动态过程^[6]。GM (1, 1) 模型实质上是数学上的单列 1 阶线性动态模型, 它的精度受系统非线性表征影响。在自然状态下, 受有限资源和植物种内、种间竞争等的影响, 植物种群增长系统呈线性的假设一般是不成立的, 只有在系统变量的变化幅度足够地小, 系统的非线性尚未明显地表现出来时, 才可以近似地看作是线性的。反之, 当系统非线性表征很强时, 强行套用 GM (1, 1) 模型必然会导致模型精度的降低。虽有相应的残差模型可以用来提高模拟和预测的精度, 但当模型误差是由系统实测值随机性和不规则所导致时, 残差模型不适用。所以, 当 GM (1, 1) 模型不满足系统的非线性时, 应尽可能地采用合理的非线性模型。马尔柯夫过程是一个随机变化的动态过程, 其转移概率可反映随机因素的影响程度, 它适用于随机波动较大的问题, 因此, 灰色系统理论和马尔柯夫理论相结合, 具有互补的性质, 从而能提高模型的精度。本文的研究结果亦表明了对于数据时序随机波动较大的植物种群动态的模拟和预测问题, 灰色-马尔柯夫模型确实是一种较为理想的方法。

参考文献

- 1 赵志模, 周新远. 生态学引论. 重庆: 科学技术文献出版社重庆分社, 1984, 20~35.
- 2 周纪纶, 郑师章, 杨 持. 植物种群生态学. 北京: 高等教育出版社, 1992, 10~50.
- 3 高 琼. GM (1, N) 模型对生物系统应用的研究. 植物生态学与地植物学学报, 1991, 15 (2): 121~128.
- 4 邓聚龙. 灰色系统 (社会·经济). 北京: 国防工业出版社, 1985, 1~50.
- 5 傅 立. 灰色系统理论及其应用. 北京: 科学技术文献出版社, 1992, 1~93.
- 6 孙继华, 王义廷, 刘世荣. 日本落叶松人工林种群自然稀疏规律的研究. 生态学杂志, 1990, 9 (4): 35~37.