第 12 卷第 3、4 期 广西科学院学报 Vol. 12, No. 3 & 4
1996 年 9 月 Journal of Guangxi Academy of Sciences Sep. 1996

15
77-83

双圆 n 边形再探

A Further Study on the Bicircular n-polygon

苏文龙
Su Wenlong

O181

(广西梧州市第一中学 梧州 543002)
(Wuzhou No. 1 Middle School, Wuzhou, Guangxi, 543002)

A **摘要** 推广了文献 [1] 的结果，圆满地解决了广义双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形的存在性问题.

关键词 第 m 类双圆 n 边形 广义双圆 n 边形 存在性 双圆多边形 双圆四边形

Abstract This paper developed the result of reference 1, and satisfactorily solved the problem of the exsistence of bicircular n -polygon $(3\leqslant n\leqslant 6)$ in extensive sense.

Key words bicircular n -polygon of m class, bicircular n -polygon in extensive sense, exsistence

近年来，国内外知名的学者深入挖掘了 Fuss(1755～1826)[2] 研究过的双圆四边形的性质，获得了许多新的成果（见文献 [2] ～ [5]），但对于非等边的双圆 $n(n\geqslant 5)$ 边形的存在性，二百年来一直是个难解之迷，尚有待探讨[5,6]. 文献[1] 对此作了初步的探索，本文在此基础上作进一步的研究，把通常的双圆 n 边形的概念推广到广义双圆 n 边形，推导得广义双圆 n 边形存在的充要条件，并圆满地解决了广义双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形的存在性问题.

1 第 m 类双圆 n 边形

给定整数 $n\geqslant 3$，整数 $m(1\leqslant |m|<n)$ 和实数 a,b,r，记 $d=\sqrt{a^2+b^2}$，设

$$d+|r|<1 \quad 且 r\neq 0 \tag{1}$$

则在复平面的单位圆内含以 $O_1(a,b)$ 为圆心、$|r|$ 为半径的圆 O_1. 在单位圆上构作点列 $\{Z_k\}$：以单位圆上的某一点 Z_0 为起点且线段 Z_kZ_{k+1}（k 为整数）与圆 O_1 相切（切点在这线段上）. 注意到过点 Z_0 可以作圆 O_1 的两条切线分别交单位圆于 Z_1 和 Z_{-1}，不失一般性，我们规定：三个点 Z_{-1},Z_0,Z_1 总是按正方向（逆时针方向）排列的. 于是由 Z_0 出发可分别通过 Z_1 和 Z_{-1} 按两个相

1996-05-03 收稿.

反方向递归地作出点列

$$\{Z_k\} = \{\cdots, Z_{-2}, Z_{-1}, Z_0, Z_1, Z_2, \cdots\}$$

我们称它为双向递推点列. 由构造法易知：这点列中任意三点 Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1} 和 $\triangle O_1 Z_k Z_{k+1}$ 的三个顶点总是正向排列的.

考察点 Z_k 的幅角 θ_k. 约定起点 Z_0 的幅角 θ_0 是通常意义下的幅角主值. 注意到线段 $Z_k Z_{k+1}$ 是单位圆上的一条弦，它对应于单位圆上的一条有向弧 $\overset{\frown}{Z_k Z_{k+1}}$. 设向量 OZ_k 绕坐标原点 O 按正方向旋转到向量 OZ_{k+1} 所成角为 α_k，显然 $0 < \alpha_k < 2\pi$. 定义

$$\{\theta_k\}: \theta_{k+1} - \theta_k = \begin{cases} \alpha_k & \text{当 } m > 0 \\ \alpha_k - 2\pi & \text{当 } m < 0. \end{cases}$$

易知 $m(\theta_{k+1} - \theta_k) > 0$，则当 $m > 0$ 时 $\{\theta_k\}$ 是单调递增的，当 $m < 0$ 时 $\{\theta_k\}$ 是单调递减的. 于是在给定参数 m 后，我们就定义了与点列 $\{Z_k\}$ 相应的幅角序列 $\{\theta_k\}$，并且这两个序列间存在着一一对应的关系（这与通常幅角的意义不同，那里的幅角是多值的）.

一般地，点列 $\{Z_k\}$ 是无限的并且其中未必有重合的两点. 如果 Z_n 与 Z_0 重合但 $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{n-1}$ 中任意两点都不重合，并且 $\theta_n - \theta_0 = 2\pi m$，我们就称 n 边形 $Z_0 Z_1 \cdots Z_n$ 作成以 Z_0 为起点的关于参数 a, b, r 的第 m 类双圆 n 边形，简称第 m 类双圆 n 边形. 如果这双圆 n 边形对于另一个参数 m_1 也作成第 m_1 类双圆 n 边形，我们就说这个双圆 n 边形的两种名称 —— 第 m 类双圆 n 边形和第 m_1 类双圆 n 边形 —— 是同义的，并且也简称参数 m 和 m_1 是同义的.

命题 1 设 $m > 0$，则第 m 类双圆 n 边形和第 $m - n$ 类双圆 n 边形是同义的.

证明 考察第 m 类双圆 n 边形 $Z_0 Z_1 \cdots Z_n$，其中 $0 < m < n$，则 $-n < m - n < 0$. 令 $Z'_k = Z_k$，则双圆 n 边形 $Z_0 Z_1 \cdots Z_n$ 与 $Z'_0 Z'_1 \cdots Z'_n$ 是同一个图形. 对于参数 $m - n$，记 Z'_k 的幅角为 θ'_k，则据幅角的定义知 $\theta'_{k+1} - \theta'_k = \theta_{k+1} - \theta_k - 2\pi$，故有

$$\theta'_n - \theta'_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(\theta'_{k+1} - \theta'_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(\theta_{k+1} - \theta_k - 2\pi) = \theta_n - \theta_0 - 2\pi m$$

即得 $\theta'_n - \theta'_0 = 2\pi(m - n)$. 由此易知双圆 n 边形 $Z'_0 Z'_1 \cdots Z'_n$ 作成第 $m - n$ 类双圆 n 边形. 证毕.

命题 2 $\theta_n - \theta_0 = 2\pi m \Leftrightarrow \theta_k - \theta_{k-n} = 2\pi m$（$k$ 是整数）.

证明 当 $\theta_n - \theta_0 = 2\pi m$ 时点 Z_n 与 Z_0 重合. 由 $\{Z_k\}$ 的构造知此时 Z_k 与 Z_{k-n} 也重合. 由 α_k 的定义知 $\alpha_{k-n} = \alpha_k$，为了简便，先证 $m > 0$ 且 $1 \leqslant k < n$ 的情形，据幅角定义知

$$\theta_k - \theta_{k-n} = \sum_{j=k-n}^{k-1}(\theta_{j+1} - \theta_j) = \sum_{j=k-n}^{k-1}\alpha_j = \sum_{j=k-n}^{-1}\alpha_j + \sum_{k=0}^{k-1}\alpha_j = \sum_{j=k}^{n-1}\alpha_j + \sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j = \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j = \sum_{j=0}^{n-1}(\theta_{j+1} - \theta_j) = \theta_n - \theta_0$$

仿此可证其他情形. 证毕.

据命题 2 与点列 $\{Z_k\}$ 的构造法可知，第 m 类双圆 n 边形也可定义为：对于任意整数 k, j，有 $\theta_k - \theta_{k-n} = 2\pi m$ 并且当 $1 \leqslant |k - j| < n$ 时 $\theta_k - \theta_j$ 不等于 2π 的奇数倍.

2 广义双圆 n 边形的存在性

事实上，我们引进的第 m 类双圆 n 边形已经把通常的双圆 n 边形的概念推广到了广义双圆

n 边形；当 $m=1$ 时第 m 类双圆 n 边形就是通常的双圆 n 边形，当 $1<|m|<n-1$ 时第 m 类双圆 n 边形不是凸多边形而是双圆 n 星形了. 现在我们考察广义双圆 n 边形的存在性问题.

10 反

命题3　如果整数 n,m 的最大公约数 $(n,m)>1$，或者 $\frac{n}{2}\leqslant m<n$，那么第 m 类双圆 n 边形不存在.

证明　若 $m<0$ 则 $m+n>0$，由命题1知第 $m+n$ 类双圆 n 边形与第 m 类双圆 n 边形是同义的，因此，以下不妨设 $m>0$.

考察第 m 类双圆 n 边形 $Z_0Z_1\cdots Z_n$ 的顶点 Z_{k-1},Z_k,Z_{k+1}，其中线段 $Z_{k-1}Z_k$、Z_kZ_{k+1} 都和圆 O_1 相切. 则有向弧 $\overrightarrow{Z_{k-1}Z_k}$、$\overrightarrow{Z_kZ_{k+1}}$ 和 $\overrightarrow{Z_{k+1}Z_{k-1}}$ 首尾相接并且恰好围成一圈，它们所对的圆心角 α_{k-1}、α_k 和 β_{k+1}（都是正角）之和为 2π，据幅角的定义有

$$\theta_k-\theta_{k-1}+\theta_{k+1}-\theta_k+\beta_{k+1}=2\pi$$

令 k 跑过 $0,1,\cdots,n-1$ 得 n 条相应于 $\{\beta_{k+1}\}$ 的有向弧 $\{\overrightarrow{Z_{k+1}Z_{k-1}}\}$，由双圆 n 边形的构造可知，适当调整这 n 条弧的排列次序，可使它们首尾相接并且恰好环绕圆周若干圈. 因此存在正整数 a，使这 n 条弧所对的圆心角 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 之和为 $2\pi a$. 我们称正整数 a 为特征数，它反映了这双圆 n 边形的某种构造性的特征. 由上式有

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\theta_k-\theta_{k-1}+\theta_{k+1}-\theta_k+\beta_{k+1})=\sum_{k=0}^{n-1}2\pi$$

$$\theta_{n-1}-\theta_{-1}+\theta_n-\theta_0+2\pi a=2\pi n$$

据命题2有 $2\pi m+2\pi m+2\pi a=2\pi n$，即

$$2m+a=n \qquad (*)$$

我们称它为关于特征数 a 的特征方程，它反映了：点 Z_n 与 Z_0 重合并且 $\theta_n-\theta_0=2\pi m$ 这样一个构造性的特征. 由 $(*)$ 式知 $n-2m=a>0$，因此当 $\frac{n}{2}\leqslant m<n$ 时第 m 类双圆 n 边形不存在.

假设 $(n,m)=c>1$，则有 $n=n'c,m=m'c$ 且 $a=a'c$，由 $(*)$ 式有 $2m'+a'=n'$，这表明：以 a' 为特征数，可以借用双圆 n 边形 $Z_0Z_1\cdots Z_n$ 的部分顶点构造一个新的第 m' 类双圆 n' 边形，于是点 $Z_{n'}(1<n'<n)$ 与 Z_0 重合，这与第 m 类双圆 n 边形的定义矛盾，因此 $(n,m)>1$ 是不可能的. 证毕.

注意到 $(n,m)=1$ 时 m 与 $m-n$ 这两个数中至少有一个是奇数，因此由命题1、3知关于参数 m，只须考虑两种同义的条件之一：

$$(n,m)=1 \text{ 且 } 1\leqslant m<\frac{n}{2} \qquad (2)$$

$$\begin{cases}(n,m)=1 \text{ 且 } m \text{ 为奇数}\\ 1\leqslant m<\frac{n}{2} \text{ 或 } (-1)^n\cdot n<m<(-1)^n\cdot\frac{n}{2}\end{cases} \qquad (3)$$

令 $x_k=\operatorname{tg}\frac{1}{4}\theta_k$，则与点列 $\{Z_k\}$ 相应的 $\{x_k\}$ 称为双向递推数列. 当 θ_k 为 2π 的奇数倍时 $x_k\to\infty$，此时我们也认为 x_k 存在.

定理 1 广义双圆 n 边形存在的充要条件是：参数 m 满足(2) 或(3)，参数 a,b,r 满足(1)，并且对于任意整数 k,j 有

$$\begin{cases} x_k \cdot x_{k-n} = -1 & (4) \\ x_k \cdot x_j \neq -1 (1 \leqslant |k-j| < n) & (5) \end{cases}$$

证明 由命题 1.3 知条件(2) 与(3) 是同义的，因此在以下证明中涉及到参数 m 时总是按(3) 式而约定 m 是奇数.

必要性 考察第 m 类双圆 n 边形 $Z_0Z_1\cdots Z_n$. 据 $\{Z_k\}$ 的构造知(1) 成立，据命题 1.3 知(3) 成立. 据双圆 n 边形的定义与命题 2 知

$$\theta_k - \theta_{k-n} = 2\pi m \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\frac{1}{4}\theta_k = \mathrm{tg}(\frac{1}{4}\theta_{k-n} + \frac{\pi}{2}\cdot m)$$

由 m 为奇数知 $\mathrm{tg}\,\frac{1}{4}\theta_k = -\mathrm{ctg}\,\frac{1}{4}\theta_{k-n}$，即得(4). 如果 $\theta_k - \theta_j$ 等于 2π 的整数倍，则点 Z_k 与 Z_j 重合，即多边形 $Z_k\cdots Z_j$ 作成广义双圆 $|k-j|$ 边形，仿上述推导得 $x_kx_j = -1$. 但据第 m 类双圆 n 边形的定义知 Z_k 与 Z_j 不能重合. 故有(5).

充分性 如果(1)(4)(5) 成立，则由上述推导可知点 Z_k 与 Z_j 不重合，并且存在某个满足(3) 的奇数 m 使 $\theta_k - \theta_{k-n} = 2\pi m$. 由幅角的定义知点 Z_k 与 Z_{k-n} 重合，因此据 $\{Z_k\}$ 的构造与第 m 类双圆 n 边形的定义知多边形 $Z_0Z_1\cdots Z_n$ 作成第 m 类双圆 n 边形. 在不必指明它是属于哪一类时，就可以说广义双圆 n 边形存在. 证毕.

一般地，在给定参数 n,Z_0 以后，一个广义双圆 n 边形还有 4 个参数 a,b,r,m. 其中(2) 或(3) 可确定 m 而与 a,b,r 无关. 由点列 $\{Z_k\}$ 的构造与 $\{x_k\}$ 的定义知(1)(4)(5) 确定了参数 a,b,r 的关系式而和 m 无直接的联系. 因此，参数 m 与 a,b,r 无直接联系，但间接的关系是存在的. 由点列 $\{Z_k\}$ 的构造易知

定理 2 对于给定的参数 n,Z_0,a,b，如果关于参数 r_1 的第 m_1 类双圆 n 边形和关于参数 r_2 的第 m_2 类双圆 n 边形都存在，其中 m_1 与 m_2 都满足(2)，那么 $|r_1| > |r_2| \Leftrightarrow m_1 < m_2$.

易知满足(2) 或(3) 的整数 m 的个数为 $\frac{1}{2}\varphi(n)$，其中 $\varphi(n)$ 是数论中著名的欧拉函数，即不大于 n 而和 n 互素的正整数的个数. 如果参数 a,b 为已知，则(4) 给出了关于 r 的方程 $f(r) = 0$，(5) 给出了关于 r 的不等式 $g(r) \neq 0$. 由点列 $\{Z_k\}$ 的构造知参数 r 是通过 $|r|$ 起作用的，因此我们令 $r(a,b)$ 表示在约束条件(1) 和 $g(r) \neq 0$ 的范围内方程 $f(r) = 0$ 的绝对值不同的实根的个数，则由定理 1 知对于方程 $f(r) = 0$ 的每一个这样的实根 r，都有满足(2) 或(3) 的在同义概念下唯一的参数 m，使关于参数 r 的第 m 类双圆 n 边形存在，如果 $r(a,b) = \frac{1}{2}\varphi(n)$，那么由定理 2 知相应的参数 m 与 r 之间存在一一对应关系，据定理 1 就有

定理 3 给定参数 n,Z_0,a,b，如果 $r(a,b) = \frac{1}{2}\varphi(n)$，那么对于任意满足(2) 或(3) 的参数 m，都存在第 m 类双圆 n 边形.

于是在已知参数 n,Z_0,a,b 时，广义双圆 n 边形的存在性问题就转化到对方程 $f(r) = 0$ 的实根的研究. 仿此可研究在给定 n,Z_0,r 时广义双圆 n 边形的存在性问题，这里从略了.

3 双向递推数列的若干引理

为了书写简便，记 $\alpha = \theta_k/2, \beta = \theta_{k+1}/2$. 为了在 $\{x_k\}$ 的推导中得到统一的公式，约定，参数

m 与 r 之间存在着关系式

$$(-1)^m \cdot mr < 0 \tag{6}$$

由幅角的定义知 $m(\beta-\alpha)>0$，与上式联立得 $(-1)^m \cdot r(\beta-\alpha)<0$. 注意到在定理 1 的推导中取定 m 是满足(3)的奇数，故可得到 $r(\beta-\alpha)>0$. 由于 $|\beta-\alpha|<\pi$，就有 $r\sin(\beta-\alpha)>0$.

考察正向排列的 $\triangle O_1Z_kZ_{k+1}$ 的面积. 注意到点 $O_1(a,b)$ 到边 Z_kZ_{k+1} 的距离为 $|r|$，且 $Z_k(\cos 2\alpha,\sin 2\alpha)$，$Z_{k+1}(\cos 2\beta,\sin 2\beta)$，就有

$$\frac{1}{2}|r|\sqrt{(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)^2}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin 2\beta & 1\end{vmatrix}$$

如上述，对于满足(3)或同义的条件(2)的任意参数 m，以及满足(6)的参数 r，恒有 $r\sin(\beta-\alpha)>0$，因此整理上式总可得到

$$2r\sin(\beta-\alpha)=\sin 2(\beta-\alpha)-a(\sin 2\beta-\sin 2\alpha)+b(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)$$

$$r=\cos(\beta-\alpha)-a\cos(\beta+\alpha)-b\sin(\beta+\alpha)$$

$$r=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-a(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)-b(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

令 $A=r-a+1$，$B=2b$，$C=r+a-1$，$D=4a+4$，据 x_k 的定义及万能公式

$$\begin{cases}(1+x_k^2)\cos\alpha=1-x_k^2, & (1+x_k^2)\sin\alpha=2x_k \\ (1+x_{k+1}^2)\cos\beta=1-x_{k+1}^2, & (1+x_{k+1}^2)\sin\beta=2x_{k+1}\end{cases}$$

代入前式整理就得到初值为 $x_0=\operatorname{tg}\frac{1}{4}\theta_0$ 的数列 $\{x_k\}$ 的递推公式

$$x_{k+1}^2(Cx_k^2-Bx_k+A)-x_{k+1}(Bx_k^2+Dx_k-B)+Ax_k^2+Bx_k+C=0 \tag{7}$$

把 k 换成 $k-1$ 并整理可得

$$x_{k-1}^2(Cx_k^2-Bx_k+A)-x_{k-1}(Bx_k^2+Dx_k-B)+Ax_k^2+Bx_k+C=0$$

比较上述两式可知 x_{k-1} 和 x_{k+1} 是某个二次方程的两根，据韦达定理得

引理 1 设 $Cx_k^2-Bx_k+A\neq 0$，则

$$x_{k-1}+x_{k+1}=\frac{Bx_k^2+Dx_k-B}{Cx_k^2-Bx_k+A} \tag{8}$$

$$x_{k-1}\cdot x_{k+1}=\frac{Ax_k^2+Bx_k+C}{Cx_k^2-Bx_k+A} \tag{9}$$

当 $Cx_k^2-Bx_k+A=0$ 时易知 x_{k+1} 或 $x_{k-1}\to\infty$，此时 θ_{k+1} 或 θ_{k-1} 等于 2π 的奇数倍，点 Z_{k+1} 或 Z_{k-1} 的坐标为(1，0). 不失一般性，以下约定 $Z_0(1,0)$，$\theta_0=0$，此时 $x_0=0$ 并且由(7)有

引理 2 x_1 与 x_{-1} 是方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的两个实根.

这是因为由(1)易知 $B^2-4AC>0$，故上述方程恒有实根. 约定 $mx_1>0$，则有 $(m-n)x_1<0$. 据命题 1 知参数 m 和 $m-n$ 是同义的，因此上述方程的两个实根中的哪一个作为 x_1 都是

<0. 据命题1知参数 m 和 $m-n$ 是同义的，因此上述方程的两个实根中的哪一个作为 r 都是可以的. 于是据引理1就可以递推得 $\{x_k\}$.

参看文献[1]的推导，我们还可得到

引理3　设 $3\leqslant n\leqslant 6$，则(4)(5)两式等价于

$$n=3: 2r=1-d^2 \tag{10}$$

$$n=4: 2(1+d^2)r^2=(1-d^2)^2 \tag{11}$$

$$n=5: 8d^2r^3+4(1-d^2)r^2-2(1-d^2)^2r-(1-d^2)^3=0 \tag{12}$$

$$n=6: 16d^2r^4+4(1+d^2)(1-d^2)^2r^2-3(1-d^2)^4=0 \tag{13}$$

4　双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形的存在性及其性质

据引理3和定理1，我们有更具体的

定理4　第 m 类双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形存在的充要条件是：参数 m 满足(2)或(3)，参数 a,b,r 满足(1)(6)和(10)～(13).

定理5　给定参数 n,a,b：$3\leqslant n\leqslant 6$，$a^2+b^2<1$，则对于由(2)或(3)确定的每一个参数 m，第 m 类双圆 n 边形都存在.

证明　据定理3，我们只须证明 $r(a,b)=\frac{1}{2}\varphi(n)$. 据引理3易知当 $n=3,4,6$ 时有 $r(a,b)=\frac{1}{2}\varphi(n)=1$. 当 $n=5$ 时设关于 r 的方程 $f(r)=0$ 如(12)，注意到 $0\leqslant d<1$ 即得

$$f(-\infty)<0$$

$$f(d-1)=(1-d)^4(d^2+10d+5)>0$$

$$f(0)=-(1-d^2)^3<0$$

$$f(1-d)=(1-d)^6>0$$

因此方程 $f(r)=0$ 恰有三个实根 r_1,r_2,r_3 并且有

$$r_3<d-1<r_2<0<r_1<1-d$$

由此易知在 $d+|r|<1$ 的范围内只有两个实根 r_1 与 r_2，从而有 $r(a,b)=\frac{1}{2}\varphi(5)=2$. 于是据定理3即得定理5. 证毕.

对方程(12)作进一步研究还可得到 $|r_m|\leqslant\cos\frac{1}{5}m\pi$（其中 $m=1$ 或2；当且仅当 $d=0$ 时取等号）. 由此易知

定理6　设 $3\leqslant n\leqslant 6$，则对于由(2)确定的任意参数 m，当且仅当 $0<|r|\leqslant\cos\frac{m\pi}{n}$ 时关于参数 r 的第 m 类双圆 n 边形存在. 其中 r 满足(6).

定理5和定理6分别解决了已知参数 n,a,b 和已知参数 n,r 的广义双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形的存在性问题.

由引理3知参数 r 仅与 d 有关而和 a 或 b 无直接的单独的联系，只要参数 r 和 d 满足(1)和(10)～(13)，那么内切圆的圆心 $O_1(a,b)$ 可以选取为"轨迹圆"$a^2+b^2=d^2$ 上的任意一点. 由此容易得到广义双圆 n 边形的一个最重要的性质：

定理7　以广义双圆 $n(3\leqslant n\leqslant 6)$ 边形外接圆上的任意一点为起点，都可以作成一个新双圆 n 边形，并且这双圆 n 边形的参数 n,m,a,b,r 都保护不变.

现在举例说明在已知 n, m, a, b 时怎样构作一个广义双圆 n 边形. $m = 1$ 的例子见文献[1]，这里只考察双圆 5 星形. 设 $m = 2$, $d = \sqrt{a^2 + b^2} < 1$，由(12) 得 $\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \leqslant r_2 < 0$. 据引理 1.2 得 $\{x_k\}$. 据 $x_k = \operatorname{tg}\frac{1}{4}\theta_k$ 并注意到 $\{\theta_k\}$ 的单调性可确定 $\{\theta_k\}$. 由相应的 $\{\theta_k\}$ 得 $Z_k(\cos\theta_k, \sin\theta_k)$，即可作成双圆 5 星形. 以下结果在微机 IBM 上作单精度运算得到，略有误差. 理论上应有 $x_n \to \infty$ 且 $Z_n(1, 0)$，即 Z_1 与 Z_n 重合.

例 1　已知 $n = 5$, $a = 0.16$, $b = 0.12$，算得 $d = 0.2$, $r_2 = -0.2987220$ 并有

$x_1 = -1.688979$, $Z_1(-0.5375173, 0.843254)$

$x_2 = 3.211578$, $Z_2(0.3554204, -0.9347066)$

$x_3 = 0.257848$, $Z_3(0.5323632, 0.8465161)$

$x_4 = -0.8028393$, $Z_4(-0.9065691, -0.4220573)$

$x_5 = 799115.8$, $Z_5(1, -5.070364 \times 10^{-6})$

例 2　已知 $n = 5$, $a = 0.12$, $b = 0.35$，算得 $d = 0.37$, $r_2 = -0.2733834$，并有

$x_1 = -1.761273$, $Z_1(-0.474805, 0.8800911)$

$x_2 = 2.108102$, $Z_2(-0.1995603, -0.9798856)$

$x_3 = 0.3200127$, $Z_3(0.3258763, 0.9454124)$

$x_4 = -1.070144$, $Z_4(-0.9908364, 0.1350685)$

$x_5 = 1042252$, $Z_5(1, 3.639852 \times 10^{-6})$

致谢

本文的写作，得到著名学者杨之先生（天津市特级教师）的热诚帮助和指教，在此表示衷心感谢！

参考文献

1　苏文龙. 双圆 n 边形初探. 广西科学，1995，2（2）：10～13.

2　德　里（Heinrich Dörrie）. 100 个著名的初等数学问题——历史和解. 上海：上海科学技术出版社，1982，8：211～216（第 39 题）.

3　沈文选. 双圆四边形的一些有趣性质. 数学通报，1991，（5）：28～30.

4　管宇翔. 双心四边形的性质. 见：杨世明主编. 中国初等数学研究文集. 郑州：河南教育出版社，1992. 691～696.

5　杨　之. 初等数学研究的问题与课题. 长沙：湖南教育出版社，1993，5：99（whc 33）.

6　杨　之. 近年中国初等数学研究的若干新成果. 数学通讯，1994，（7）：22.