DOI: 10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1998.02.008

运输问题有最优符号差的一个充分条件*

A Sufficient Condition for the Transportation Problems with Optimal Signature

何登旭

He Dengxu

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁 530006)

(Dept. of Math. & Comp., Guangxi Univ. for Nationalites, Nanning, 530006)

摘要 得到一般运输问题有最优符号差的一个充分条件. 给出符号差类运输问题的概念.

关键词 运输问题 符号差 充分条件

中图法分类号 O 221

Abstract We obtain a sufficient condition which the general transportation problems have optimal signature.

Key words transportation problem, signature, sufficient condition

在文献 [1]中,对运输问题的符号差问题作了一些研究,并给出了需求量为常数 D的运输问题有最优符号差的充分条件,本文对一般运输问题进行研究,并给出对一般运输问题有最优符号差的一个充分条件.

关于运输问题的提出与概念可参见文献 [2]及其他教科书,在此略述.

运输问题的数学模型如下:

$$(TP) \quad \min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

$$x_{ij} \text{ 均为非负整数} \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$$

其中 a_i、b_j 均为正整数.此处,假设$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,即我们所考虑的运输问题为平衡运输问题;若为非平衡运输问题,可以虚设一个发点 (当$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$时) 或虚设一个收点 (当$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

1998-01-20收稿, 1998-03-18修回稿.

* 广西区科委攻关项目资助

时),从而转非平衡问题为平衡问题.

在文献[3]中指出了运输问题具有么幂性质,从而其可行解均为整数,因此运输问题(TP)与下述问题等价:

$$(TP')\quad \min\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

$$x_{ij}\geqslant 0\qquad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

在以下的讨论中,本文将(TP')称为运输问题.

运输问题(TP')的对偶问题可表述如下:

$$(TD)\quad \max\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j g_j$$

$$\text{s.t.}\ u_i + g_j\leqslant c_{ij}\qquad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n$$

令 $TP' = TP'_{m,n}(\{a_i\},\{b_j\})$为问题($TP'$)的可行点(或解)的集合,$TD = TD_{m,n}(\{x_{ij}\})$为问题($TD$)的可行点(或解)的集合.同研究分派问题一样,在此也将运输问题视为二元图,发点为行结点,收点为列结点,记 R为行结点集合,C为列结点集合

定义 1　若运输问题的一棵生成树 T对应的(TD)的解(取 $u_1 = 0$)是可行的,则称 T是对偶可行的;若 T对应的(TP')的解是可行的,则称 T是原始可行的;若 T既是对偶可行的,又是原始可行的,则称 T是运输问题(TP')的最优树.

由互补松驰条件可知,若 T是运输问题(TP')的最优树,则 T对应的(TD)的解(本文指凡在 T中的边对应的(TD)的约束条件均取等号)为(TD)的最优解.由此,我们在求解运输问题(TP')时,仅求出其最优树即可.由于运输问题(TP')有 $m+n$个结点,从而其生成树会有 $m+n-1$条边.

定义 2　对运输问题(TP'),若任何一个带有符号差 d的树均是可行的,则称 d为其最优符号差.

引理 1　给定一个运输问题(TP')和一个向量 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)$,其中$\sum_{i=1}^{m} d_i = m+n-1$,$d$是($TP'$)的一个最优符号差的充要条件是$\sum_{i\in U} d_i\geqslant |U| + |V|$,对一切满足$\sum_{i\in U} a_i > \sum_{j\in V} b_j$的 $U\subset R$和 $V\subset C$成立.

其中 R与 C分别为(TP')的行结点(或供给点)的集合与列结点(或需求点)的集合.

关于此引理的证明可参考文献[1]与文献[4].

引理 2　对运输问题(TP'),若 $b_j = D$(D为正整常数),$a_i = k_iD + r_i$,其中 $0\leqslant r_i < D$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$,则运输问题(TP')有(行)最优符号差的充要条件为$\sum_{i=1}^{m} r_i\leqslant D$.

证明　$\because \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,

$$\therefore D\sum_{i=1}^{m} k_i + \sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{j=1}^{n} D$$

$\sum_{i=1}^{m} r_i = (n - \sum_{i=1}^{m} k_i)D$,即$\sum_{i=1}^{m} r_i$为 D的非负整数倍.

1) 当 $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$ 时, $r_i = 0, 1\leqslant i\leqslant m$, 则 $a_i = k_i D, 1\leqslant i\leqslant m$

$\therefore \sum_{i=1}^{m} k_i = n$, 任选一个 $p(1\leqslant p\leqslant m)$, 令 $d_p = k_p$, $d_i = k_i + 1$

其中 $i\neq p, 1\leqslant i\leqslant m$, 有 $\sum_{i=1}^{m} d_i = \sum_{i=1}^{m} k_i + (m-1) = m+n-1$

下面证明如此定义的 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)$ 为运输问题 (TP') 在 $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$ 条件下的一个符号差且为最优符号差.

对任一满足 $\sum_{i\in U} a_i > \sum_{j\in V} b_j$ 的 $U\subset R, V\subset C$ (其中 R,C 定义同引理 1), 有 $\sum_{i\in U} k_i D > \sum_{j\in V} D = D|V|$, 从而 $\sum_{i\in U} k_i \geqslant |V| + 1$, 因此 $\sum_{i\in U} d_i \geqslant |U| - 1 + \sum_{i\in U} k_i \geqslant |U| + |V|$. 证毕.

2) 当 $\sum_{i=1}^{m} r_i = D$ 时, 我们有 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n-1$, 令 $d_i = k_i + 1, 1\leqslant i\leqslant m$, 则 $\sum_{i=1}^{m} d_i = m+n-1$, 仿 1) 可证 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)$ 为运输问题 (TP') 的一个最优符号差.

3) 当 $\sum_{i=1}^{m} r_i > D$ 时, 令 $R_1 = \{i|r_i = 0, 1\leqslant i\leqslant m\}, R_2 = R/R_1$, 及设在这种情况下, 运输问题 (TP') 有最优符号差.

令 $\sum_{i=1}^{m} r_i = t\cdot D$, 考虑 R_1, 由引理 1 可知:

$$\sum_{i\in R_1} d_i \geqslant |R_1| + \sum_{i\in R_1} k_i - 1 \tag{0}$$

对一切满足 $|U| = 1, U\subset R$ 的 U, 当 $U\subset R_1$ 时, 有 $a_i > k_i D - D$, 由引理 1,

$$d_i \geqslant k_i, \text{对 } \forall i\in U \tag{1}$$

考虑 $\{p\}\cup R_1$ 其中 $p\in R_2$, 因为 $a+\sum_{i\in R_1} a_i > (k_p + \sum_{i\in R_1} k_i)\cdot D$, 由引理 1,

$$d_p + \sum_{i\in R_1} d_i \geqslant 1 + |R_1| + k_p + \sum_{i\in R_1} k_i \tag{2}$$

考虑 $R_2\backslash\{p\}, P\in R_2$ (p 为 R_2 中任一元素且可与 (2) 式中不同). 因为, $\sum_{i\in R_2\backslash\{p\}} a_i > (\sum_{i\in R_2\backslash\{p\}} k_i + t - 1)\cdot D$, 所以

$$\sum_{i\in R_2\backslash\{p\}} d_i \geqslant |R_2| + \sum_{i\in R_2\backslash\{p\}} k_i + t - 2 \tag{3}$$

Ⅰ) 若存在 $i_0\in R_2$, 使 $d_{i_0}\leqslant k_{i_0} + 1$, 则由 (2) 式可知

$$\sum_{i\in R_1} d_i \geqslant |R_1| + \sum_{i\in R_1} k_i \tag{4}$$

由 (3) 式可知, 在 $R_2\backslash\{p\}$ 中至少有一个 i 使

$$d_i \geqslant k_i + 2 \tag{5}$$

不妨记此 i 为 i_1, 在式 (3) 中重取 $p = i_1$, 有

$$\sum_{i\in R_2\backslash\{i_1\}} d_i \leqslant |R_2| + \sum_{i\in R_2\backslash\{i_1\}} k_i + t - 2 \tag{6}$$

由式 (4)、(5)、(6) 知 $\sum_{i=1}^{m} d_i \geqslant |R_1| + |R_2| + \sum_{i=1}^{m} k_i + t = m+n$. 这与 $\sum_{i=1}^{m} d_i = m+n-1$ 矛盾.

Ⅱ) 若不存在 $i\in R_2$ 使 $d_i\leqslant k_i + 1$, 则对 $\forall i\in R_2$, 有 $d_i\geqslant k_i + 2$, 再由 (0) 式知: $\sum_{i=1}^{m} d_i \geqslant |R_1| + 2|R_2| + \sum^{m} k_i - 1 = m+n-t+|R_2| - 1$. 因为 $\sum^{m} r_i = \sum n = t\cdot D$, 所以 $1 < t <$

$|R_2|$，即有 $|R_2| - t - 1 \geq 0$。所以 $\sum_{i=1}^{m} d_i \geq m + n$，这又与 $\sum_{i=1}^{m} d_i = m + n - 1$ 矛盾。

综上所述 $\sum_{i=1}^{m} n > D$ 时，所述运输问题无（行）最优符号差。证毕。

对运输问题 (TP')，若 $b_j = D$（D 为正整常数），$a_i = k_i D + r_i$，其中 $0 \leq r_i < D$，$1 \leq i \leq n$，我们从引理 2的证明过程中可以得到如下结论。

结论 1　若 $\sum_{i=1}^{m} r_i = 0$，则 $d = (k_1, k_2 + 1, k_3 + 1, \cdots, k_m + 1)$ 是运输问题 (TP') 的一个最优符号差。

结论 2　若 $\sum_{i=1}^{m} r_i = D$，则 $d = (k_1 + 1, k_2 + 1, \cdots, k_m + 1)$ 是运输问题 (TP') 的一个最优符号差。

引理 3　运输问题 (TP') 有（行）最优符号差的充分条件是下述运输问题 (TP^*) 有（行）最优符号差。

$$(TP^*)\quad \min \sum_{i=1}^{m+B} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+j,j} = D - b_k \qquad \text{对 } \forall k \in \{t \mid D > b_k\} = C$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{k \in C} x_{m+k,j} = D \qquad 1 \leq j \leq m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

其中
$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\ 0 & i = m + k \text{ 且 } j = k,\ k \in C \\ M & \text{其它} \end{cases}$$

此处 $B = |C|$，M 为一个充分大的数，$D = \max_j \{b_j\}$

证明　首先，我们注意到这两个问题的最优解之间有一种联系，即问题 (TP^*) 的最优解可视为问题 (TP') 的最优解的扩充，事实上，因为 $\sum_{i,j} c'_{ij} x_{ij} = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + M \sum_{i-m \in C} x_{ij}$，若 $X_{p'}^*$ 是 (TP') 的最优解，则由 $\min \sum_{i,j} c'_{ij} x_{ij} \geq \min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \min \sum_{\substack{i-m \in C \\ 1 \leq j \leq n}} c'_{ij} x_{ij}$ 知 $X_{p'}^*$ 为 (TP^*) 的最优解。

其中 $X_{p'}^*$ 的结构为

$$x_{ij} = \begin{cases} x'_{ij} & 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m \\ D - b_k & i = m + k \text{ 且 } j = k,\ k \in C \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{7}$$

反之，其 $X_{p'}^*$ 是问题 (TP^*) 的最优解，则其满足 $1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$ 分量 x_{ij}^* 必构成问题 (TP') 的最优解，因为由问题 (TP^*) 的构成可知 $X_{p'}^*$ 必具有如 (7) 式这样的结构，从而

$$\min \sum_{i>j} c'_{ij} x_{ij} = \min \sum_{i>j} c_{ij} x_{ij} \tag{8}$$

若分量 x_{ij}^* $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ 不是 (TP') 的最优解，则与 (8) 式矛盾。

若问题 (TP^*) 有最优符号差，则由上面讨论及引理 2可知：其最优符号差有如下形式者：$d^* = (d_1, d_2, \cdots, d_{m+b})$，其中边固定为 $(m + k, k)$，则 $d = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$ 为运输问题 (TP') 的

注: 在证明过程中所述最优符号差皆对行而言,即行最优符号差.

由引理 2及引理 3,我们得到下面定理:

定理 1 运输问题(TP')有行最优符号差的充分条件是:$\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} (D - b_j) \leqslant D$,其中 $D = \max_j (b_j)$,$a_i = k_i D + r_i$,$0 \leqslant r_i < D$,$k_i \geqslant 0$,$1 \leqslant i \leqslant m$.

证明 由引理 2知,问题(TP^*)有最优符号差的充要条件是$\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{k \in C} (D - b_k) \leqslant D$,因为 $D = \max_j \{b_j\}$,所以 $D - b_k \geqslant 0$.又因 $C = \{t \mid D > b_t, 1 \leqslant t \leqslant m\}$,所以若 $j \in C$,则 $D - b_k = 0$,从而问题(TP^*)有最优符号差的充要条件为: $\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{m} (D - b_j) \leqslant D$.

由引理 3知,运输问题(TP')有最优符号差的充分条件为: $\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} (D - b_j) \leqslant D$.证毕.

同理,有下列定理:

定理 2 运输问题(TP')有列最优符号差的一个充分条件为$\sum_{j=1}^{n} r'_j + \sum_{i=1}^{m} (D' - a_i) \leqslant D'$,其中 $D' = \max_i \{a_i\}$,$b_j = k'_j D' + r'_j$ ($0 \leqslant r'_j < D$,$1 \leqslant j \leqslant n$,$k_j$ 为非负整数).

推论 运输问题(TP')若满足$\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} (D - b_j) = 0$,则 $d = (k_1, k_2 + 1, \cdots, k_m + 1)$ 为其一个最优(行)符号差;若满足$\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} (D - b_j) = D$,则 $d = (k_1 + 1, k_2 + 1, \cdots, k_n + 1)$ 为其一个最优(行)符号差.

此推论可由引理 1的证明过程及引理 3直接推得.同样地对列也有相应的推论,在此略.

从上面的讨论可知,定理 1及定理 2给出了运输问题有最优符号差的一个充分条件,显然,这个充分条件包含了引理 3中的条件,但是对于满足$\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} (D - b_j) > D$的运输问题是否存在最优符号差,还应作进一步研究,但有一点可以肯定:不是所有运输问题均存在最优符号差,即上述条件下肯定有些运输问题不存在最优符号差,具体到哪些有哪些没有,还须进一步研究.在此,把那些有最优符号差的运输问题称为符号差类运输问题.显然满足定理 1及定理 2条件的运输问题均属于符号差类运输问题.

参考文献

1 Peter Kleinschmidt, Card W Lee, Heine Schannath. Transportation problems which can be solved by the use of Hirsch-Paths for the dual problems. Mathematical Programming, 1987, 37: 153- 168.

2 许万蓉. 线性规划. 北京: 北京理工大学出版社, 1988. 219- 224.

3 堵丁柱. 计算复杂性对运筹学发展的影响. 运筹杂志, 1989, 8 (1): 7- 11.

4 Ford L P, Fulkerson D P. Flow in network. Wiley, New York, 1987, 111- 112.