DOI: 10.13657/j.cnki.gxkxyxb.1998.04.005

第 14卷第 4期 广 西 科 学 院 学 报 Vol. 14, No. 4
1998年 11月 Journal of Guangxi Academy of Sciences November 1998

FGT-内射模的新刻画
New Descriptions of FGT-Injective Modules

唐金玉

Tang Jinyu

(广西大学数学与信息科学系 南宁 530004)

(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., Nanning, 530004)

摘要 给出了一般环及 C-凝聚环上的模是 FGT-内射模的一些充分必要条件.

关键词 C-凝聚环 FGT-内射模 一般环

中图法分类号 O 153.3

Abstract Some sufficient and necessary conditions which a module is FGT-injective module over general rings and C-coherent rings are given.

Key words C-coherent rings, FGT-injective modules, general rings

在文献 [1,2]中, C-凝聚环称为 GN-环,它是介于 Noether环与凝聚环之间的重要环类,很多作者都研究了这类环.正如内射模刻画了 Noether环, FP-内射模刻画了凝聚环一样, FGT-内射模也很好地刻画了 C-凝聚环[3,4].因此, FGT-内射模在 C-凝聚环的研究中有重要地位.为此,本文给出 FGT-内射模的一些新的刻画.

在本文中, R表示有单位元的结合环, M_R $({}_RM)$表示右 (左) R-模 M, $(-)^+$ 表示特征模 $\mathrm{Hom}_Z(-,Q/Z)$,用“ f.g.”表示“有限生成”,其余的符号、术语与文献 [5]一致.

让 $C=\prod R_R$是 R_R的任意直积,如果 C的每个“ f.g.”子模都有限表现 (有限相关),则称 R为右 C-凝聚环.左 C-凝聚环可类似地定义[3].若 R既是左 C-凝聚环,又是右 C-凝聚环,则 R称为 C-凝聚环.若对于任意“ f.g.”无挠右 R-模 A,都有 $\mathrm{Ext}_R^1(A,M)=0$,则称右 R-模 M为 FGT-内射右 R-模.同理可定义 FGT-平坦模[6].

定义 左 R-模正合列

$$0\to M'\to M\to M''\to 0 \tag{1}$$

称为广义纯正合列,若对于任意 f.g. 无挠右 R-模 L,有 $0\to L\otimes_R M'\to L\otimes_R M\to L\otimes_R M''\to 0$ 正合.显然,若 R是 C-凝聚环,正合列(1)是广义纯正合列当且仅当对任意 f.g.无挠左 R-模 A,序列 $0\to \mathrm{Hom}_R(A,M')\to \mathrm{Hom}_R(A,M)\to \mathrm{Hom}_R(A,M'')\to 0$正合.

定理 1 设 R为 C-凝聚环,下列陈述等价:

(1) M_R 为 FGT-内射模;

1997-09-05收稿, 1998-07-06修回.

(2) 每个右 R－模正合列 $0\to M\to B\to C\to 0$为广义纯正合列;

(3) 对每个正合列 $0\to M\to B\to C\to 0$及每个 f. g. 无挠模 L_R,同态 $h: L\to C$,存在同态 $J: L\to B$,使 $UJ=h$,即图 1可交换:

(4) 对每个正合列 $0\to M\to B\to C\to 0$,序列 $0\to C^+\to B^+\to M^+\to 0$是广义纯左 R－模正合列;

(5) 正合列 $0\to M\to E(M)\to E(M)/M\to 0$为广义纯正合列,其中 $E(M)$ 为 M的内射包络.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ B \arrow[r, "U"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

图 1 交换图

证明: (1)⇒(2): 对任意 f.g. 无挠右 R－模 L, 由 (1) 知 $\mathrm{Ext}_R^1(L,M)=0$, 故序列 $0\to\mathrm{Hom}_R(L,M)\to\mathrm{Hom}_R(L,B)\to\mathrm{Hom}_R(L,C)\to 0$正合,即 (2) 成立;

(2)⇒(3): 因 $0\to M\to B\to C\to 0$是广义纯正合列,故对任意 f.g. 无挠模 L_R, $\mathrm{Hom}_R(L,B)\to\mathrm{Hom}_R(L,C)\to 0$正合,即 (3)成立;

(3)⇒(4): 对任意 f.g. 无挠右 R－模 L,由 (3), $0\to\mathrm{Hom}_R(L,M)\to\mathrm{Hom}_R(L,B)\to\mathrm{Hom}_R(L,C)\to 0$正合,从而 $0\to(\mathrm{Hom}_R(L,C))^+\to(\mathrm{Hom}_R(L,B))^+\to(\mathrm{Hom}_R(L,M))^+\to 0$,而 $(\mathrm{Hom}_R(L,-))^+\cong L\otimes_R(-)^+$,故 $0\to L\otimes_R C^+\to L\otimes_R B^+\to L\otimes_R M^+\to 0$正合,即 (4)成立;

(4)⇒(2): 对任意 f.g. 无挠模 $_RL$, L 是有限表现的,有正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R(L,C^+)\to\mathrm{Hom}_R(L,B^+)\to\mathrm{Hom}_R(L,M^+)\to 0$,从而 $0\to(C\otimes_R L)^+\to(B\otimes_R L)^+\to(M\otimes_R L)^+\to 0$正合,故 $0\to M\otimes_R L\to B\otimes_R L\to C\otimes_R L\to 0$正合, (2)成立;

(2)⇒(5): 显然可得;

(5)⇒(1): 对任意 f.g. 无挠模 A_R, $0\to\mathrm{Hom}_R(A,M)\to\mathrm{Hom}_R(A,E(M))\to\mathrm{Hom}_R(A,E(M)/M)\to 0$正合,故 $\mathrm{Ext}_R^1(A,M)=0$,即 M_R是 FGT-内射的.

定理 2 对任意环 R及模 $_RM$,下列陈述等价:

(1) $_RM$是 FGT-内射模;

(2)对任意 f. g. 自由左 R－模 F的闭子模 K,有 $\mathrm{Hom}_R(F,M)/\mathrm{Ann}_{\mathrm{Hom}_R(F,M)}(K)\cong\mathrm{Hom}_R(K,M)$;

(3)对任意 f. g. 自由左 R－模 F的闭子模 K,有 $\mathrm{Hom}_R(F/K,E)\to\mathrm{Hom}_R(F/K,E/M)\to 0$正合,其中 $E=E_R(M)$是 M的内射包络.

证明: (1)⇔(2): 对任意 f. g. 自由模 $_RF$的闭子模 K,考虑以下交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ann}_{\mathrm{Hom}_R(F,M)}(K) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "f"] & \mathrm{Hom}_R(F,M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(F,M)/\mathrm{Ann}_{\mathrm{Hom}_R(F,M)}(K) \arrow[r] \arrow[d, "e"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(F/K,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(F,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_R^1(F/K,M) \end{tikzcd}$$

其中行正合,对任意 $g\in\mathrm{Hom}_R(F,M)$, $e(g+\mathrm{Ann}_{\mathrm{Hom}_R(F,M)}(K))=g|_K$,由文献 [7]23. 12 prop知 f 是同构,因此, M是 FGT-内射模 ⇔ $\mathrm{Ext}_R^1(F/K,M)=0$ ⇔ e是同构.

(1)⇔(3): 对任意 f. g. 自由模 $_RF$的闭子模 K,因 $0\to M\to E\to E/M\to 0$正合,且 $_RE$是内射模,故 $0\to\mathrm{Hom}_R(F/K,M)\to\mathrm{Hom}_R(F/K,E)\to\mathrm{Hom}_R(F/K,E/M)\to\mathrm{Ext}_R^1(F/K,M)\to 0$正合,因此, M是 FGT-内射模 ⇔ $\mathrm{Ext}_R^1(F/K,M)=0$ ⇔ (3)成立.

定理 3 对任意模 $_RM$及 f. g. 无挠模 $_RY$,以下陈述等价:

(2) 对任意左 R - 模正合列 $0\to A\to B\to Y\to 0$,及任意同态 $f: A\to M$, f均能扩张到 B 上;

(3) 对任意左 R - 模正合列 $0\to A\to B\to Y\to 0$,及左 R - 模单同态 $f: A\to M$, f 均能扩张到 B上;

(4) 任意左 R - 模正合列 $0\to M\to B\to Y\to 0$都是分裂正合列.

证明: (1)⇒(2): 对任意左 R - 模正合列 $0\to A\to B\to Y\to 0$,及同态 $f: A\to M$,因 M是 FGT-内射的,故有正合列 $0\to \mathrm{Hom}_R(Y,M)\to \mathrm{Hom}_R(B,M)\to \mathrm{Hom}_R(A,M)\to 0$,故(2)成立;

(2)⇒(3)⇒(4): 显然可得;

(4)⇒(1): 对任意 f.g. 无挠左 R - 模 Y, Y经 M的扩张为 $0\to M\to B\to Y\to 0$,由(4)知该序列分裂正合,而分裂扩张是等价的,因此 Y经 M的扩张的全体 $E(Y,M)$ 只有一个元素,由文献[5]知 $\mathrm{Ext}_R^1(Y,M)=0$,即 M是 FGT-内射模.

参考文献

1 唐金玉. GN-环与环的 FGT-平坦维数. 广西师范大学学报, 1993, 3: 1- 10.

2 黄兆泳. GN-环上的模及其同调性质. 广西师范大学学报, 1993, 3: 11- 20.

3 Camillo V. Coherence for polynomial rings. J of Alg, 1990, 132(1): 72- 76.

4 汪明义. 模的嵌入问题. 数学年刊, 1997, 1: 1- 4.

5 程福长. 同调代数. 桂林: 广西师范大学出版社, 1989.

6 Cheng Fuchang, Tang Jinyu, Huang Zhaoyong. C-coherent rings and FGT-injective dimension. SEA Bull Math, 1995, 19(3): 105- 112.

7 Carl Faith. Algebra II ring theory. Springer-verlag Berlin Heidelberg, New York, 1976.

(责任编辑: 黎贞崇)

国家科技部高技术司领导到广西计算中心考察工作

国家科技部高技术司郑司长于 1998年 9月 3日上午在广西科技厅蓝天立副厅长及高技术处兰红星处长的陪同下,到广西计算中心广西软件新技术实验室考察。郑司长参观了多媒体软件研究开发部和制作部,观看了实验室开发的"广西电子地图"、"GBH军事辅助决策系统"、"防洪减灾系统"、"广西医科大学第一附属医院多媒体导医系统"等 10多个应用系统的操作演示,了解他们的研制、开发过程,并对这些系统所能产生的社会与经济效益进行了分析。实验室负责人刘连芳用实验室自己开发的演讲辅助系统向郑司长做了工作汇报,畅谈了对科技产业化发展的设想和建议。

郑司长在考察后充分肯定了实验室科研人员为国家、地方科研工作所作出的贡献。她说,实验室的不断改造、不断研究开发新项目,不仅为社会经济发展提供了高水平的服务,而且为自己的生存与发展提供了一定的经济效益,同时培养了一批高素质、有创造性的科技人才。她希望实验室的同志们再接再励,要在"转化"二字上狠下功夫,要采取行之有效的措施促进产学、研的结合。抓住机遇,结合地方特色,发展自己的拳头产品,争取成为国家级的重点实验室,迎接新的挑战。

(广西计算中心 韦江宁)