

④ 15-21

8 个经典 4 色 Ramsey 数的新下界* New Lower Bounds of Eight Classical 4-color Ramsey Numbers

④ 15, 15

苏文龙
Su Wenlong

罗海鹏
Luo Haipeng

黎贞崇
Li Zhenchong

(广西计算中心 南宁 530022)
(Guangxi Computer
Center, Nanning, 530022)

(广西科学院 南宁 530031)
(Guangxi Academy of
Sciences, Nanning, 530031)

摘要 提出了计算经典多色 Ramsey 数 $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 下界的一个算法, 得到 8 个新的下界: $R(3, 3, 3, 11) \geq 314, R(3, 3, 3, 12) \geq 354, R(3, 3, 3, 13) \geq 432, R(3, 3, 3, 14) \geq 462, R(3, 3, 3, 15) \geq 522, R(3, 3, 3, 16) \geq 518, R(3, 3, 3, 17) \geq 674, R(3, 3, 3, 18) \geq 770$.

关键词 多色 Ramsey 数 下界 循环图 算法
中图法分类号 O 157.5; TP 312

Ramsey 数

Abstract An algorithm to compute lower bounds of classical multicolor Ramsey numbers $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$ was presented. Eight new lower bounds were obtained: $R(3, 3, 3, 11) \geq 314, R(3, 3, 3, 12) \geq 354, R(3, 3, 3, 13) \geq 432, R(3, 3, 3, 14) \geq 462, R(3, 3, 3, 15) \geq 522, R(3, 3, 3, 16) \geq 618, R(3, 3, 3, 17) \geq 674, R(3, 3, 3, 18) \geq 770$.

Key words multicolor Ramsey number, lower bound, circulant graphs, algorithm

多色 Ramsey 数 $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 是具有下述性质的最小正整数 r : 用 $n(n \geq 3)$ 种颜色把 r 阶完全图 K_r 的边任意染色后, K_r 中一定存在单色的 K_{q_i} , 这里 i 是 $1, 2, \dots, n$ 中的某一个.

除了早已证明的存在性外^[1], 人们对函数 $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 所知极少, 迄今只知道唯一的一个准确值 $R(3, 3, 3) = 17$ ^[2]. 近 30 多年来各国学者工作的一个主要方向是借助计算机得到一些下界, 综述文献[3]列出了多色 Ramsey 数目前已知的最好下界 12 个, 其中的 $R(4, 4, 4, 4) \geq 458, R(3, 3, 9) \geq 90, R(3, 3, 11) \geq 108$ 是我们在文献[4~6]中给出的.

1998-10-12 收稿.

* 广西科学基金资助项目(桂科回字 981743).

鉴于多色 Ramsey 数的研究如此困难, 本文提出了一个算法, 这个算法相当有效, 利用素数阶循环图得到了 8 个 4 色 Ramsey 数的新下界:

定理 1 $R(3, 3, 3, 11) \geq 314, R(3, 3, 3, 12) \geq 354, R(3, 3, 3, 13) \geq 432, R(3, 3, 3, 14) \geq 462, R(3, 3, 3, 15) \geq 522, R(3, 3, 3, 16) \geq 618, R(3, 3, 3, 17) \geq 674, R(3, 3, 3, 18) \geq 770.$

1 素数阶循环图的同构变换

给定整数 $n \geq 3$ 和素数 $p = 2m - 1$, 记 $Z_p = \{-m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m\} = [-m, m]$ (对于整数 $s \leq t$, 记 $[s, t] = \{s, s+1, \dots, t\}$). 以下除非另有说明, 所有整数及其运算结果都理解为模 p 后属于 Z_p , 并用通常的等号“=”表示“模 p 相等”.

定义 1 对于集合 $S = [-1, m]$ 的一个 n 部分拆 $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, 设 p 阶完全图 K_p 的顶点集 $V = Z_p$, 其边集 E 是 Z_p 的所有 2 元子集的集且有分拆

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, E_i = \{(x, y) \in E; |x - y| \in S_i\}.$$

把 E_i 中的边叫做 S_i 色的, 记 K_p 中 S_i 色边所导出的子图为 $G_p(S_i), i \in [1, n]$. 于是我们按照参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ 把 K_p 的边 n -染色, 简记为 $G_p(S)$.

引理 1 设 g 是 p 的一个原根, 则对于任意 $j, b \in Z_p, Z_p$ 到自身的线性变换 $f: x \mapsto g^j x + b$ 是 $G_p(S)$ 的同构变换:

$$f: G_p(S) \mapsto G_p(S^*) \text{ 并且 } G_p(S_i) \mapsto G_p(S_i^*).$$

$$S^* = \bigcup_{i=1}^n S_i^*, S_i^* = \{|g^j x|; x \in S_i\}.$$

证 对于任意 $x, y \in Z_p$, 恒有

$$f(x) - f(y) = g^j(x - y).$$

即得 $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ 并且有

$$|x - y| \in S_i \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = |g^j(x - y)| \in S_i^*, i \in [1, n],$$

因此 f 是顶点集 V 的 1-1 变换, 且把 $G_p(S)$ 的 S_i 色边变换成 $G_p(S^*)$ 的 S_i^* 色边, 即得引理 1 的结论. //

图 $G_p(S)$, 从而每个 $G_p(S_i) (i \in [1, n])$, 是一类特殊的 Cayley 图, 称为循环图 (circulant graphs). 按照定义 1, 图 $G_p(S)$ 有分拆 $G_p(S) = \bigcup_{i=1}^n G_p(S_i)$, 根据 Ramsey 数的定义即得

定理 2 记图 $G_p(S_i)$ 的团数为 $c_i = c(G_p(S_i)), i \in [1, n]$, 则有

$$R(c_1 + 1, c_2 - 1, \dots, c_n + 1) \geq p + 1. //$$

2 $G_p(S)$ 的团和团数

对于任意 $i \in [1, n]$, 考察 $G_p(S_i)$ 的团和团数. 我们知道循环图是顶点可迁的, 因此 $G_p(S_i)$ 的团数等于 $G_p(S_i)$ 中含顶点 0 的团的阶, 我们只须考察含顶点 0 的团. 据定义 1 知这样的团的其他非零顶点是集合 $A_i = \{x; |x| \in S_i\}$ 的元. 故有

引理 2 记 $A_i = \{x; |x| \in S_i\}$. 在图 $G_p(S_i)$ 中记顶点集为 A_i 的导出子图为 $G_p[A_i], G_p[A_i]$ 的团数为 $[A_i]$, 则有

$$G_p(S_i) \text{ 的团数} = [A_i] + 1. //$$

于是求 $G_p(S_i)$ 的团数就转化为求 $G_p[A_i]$ 的团数. 为了求得 $G_p[A_i]$, 引进 A_i 的一种全序.

定义 2 设 $x \in A_i$, 记

$$d_i(x) = |\{y \in A_i : |y - x| \in S_i\}|.$$

在 A_i 上的序 $<$ 规定如下:

1) A_i 中的二元子集 $\{a, -a\}$ 对于序 $<$ 构成区间, 并且 $a \in S_i \Leftrightarrow a < -a$.

2) 对于 A_i 中分属不同的二元子集的元 $x \in \{a, -a\}$ 和 $y \in \{b, -b\}$, 规定 $x < y$ 当且仅当 $d_i(x) < d_i(y)$, 或 $d_i(x) = d_i(y)$ 但 $a < b$, 其中 $a, b \in S_i$.

注意到 A_i 的二元子集 $\{a, -a\}$ 中有且仅有一个元属于 S_i , 并且

$$y \in A_i, |y - a| \in S_i \Leftrightarrow -y \in A_i, |-y + a| \in S_i.$$

即 $d_i(a) = d_i(-a)$, 由此易知上述 $<$ 是明确定义的, 并且 $(A_i, <)$ 是全序集. $x < y$ 称为 x 前于 y 或 y 后于 x .

定义 3 全序集 $(A_i, <)$ 上的长为 $k (k \geq 1)$ 的链 $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ 称为起点是 x_0 的 (S_i 色的) 链, 如果对于 $0 \leq h < j \leq k$ 有 $|x_h - x_j| \in S_i$. 起点是 x_0 的链的最大长记为 $l_i(x_0)$. 如果上述起点是 x_0 的长为 $k \geq 1$ 的链不存在, 就记 $l_i(x_0) = 0$.

引理 3 $[A_i] = 1 + \max \{l_i(a) : a \in S_i\}$.

证 设 $[A_i] = 1$, 即对于任意 $a \in S_i$ 与 $y \in A_i$ 恒有 $|y - a| \notin S_i$, 据定义 3 有 $l_i(a) = 0$, 此时就有 $\max \{l_i(a) : a \in S_i\} = 0$, 引理 3 成立.

以下考察 $[A_i] = 1 + k (k \geq 1)$ 的情形. 据定义 3 可知链 $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ 的 $k + 1$ 个元构成 $G_p[A_i]$ 的一个团, 即得 $[A_i] \geq 1 + \max \{l_i(a) : a \in S_i\}$. 下面再证 $[A_i] \leq 1 + \max \{l_i(a) : a \in S_i\}$.

设 $[A_i] = 1 + k \geq 2$. 则 $G_p[A_i]$ 中有 $k + 1$ 个顶点的团. 把这 $k + 1$ 个顶点按 $<$ 排序后得 $(A_i, <)$ 上的长为 k 的链, 再在所有 $(A_i, <)$ 上的长为 k 的链中取起点按 $<$ 来说最前面的一条, 记为 $x_0 < x_1 < \dots < x_k$. 我们断言一定有 $x_0 \in S_i$.

假设不然, 即 $-x_0 \in S_i$. 由于 g 是 p 的原根有 $g^{2m} = 1$ 但 $g^m \neq 1$, 从而有 $g^m = -1$. 在引理 1 中令 $j = m, b = 0$ 则变换 $f: x \mapsto -x$ 是 $G_p(S)$ 的自同构, 从而 f 也是 $G_p[A_i]$ 的自同构, 它把 $G_p[A_i]$ 中 $k + 1$ 个顶点的团 x_0, x_1, \dots, x_k 变换成 $G_p[A_i]$ 中另一个团 $-x_0, -x_1, \dots, -x_k$. 据定义 3 知这 $k + 1$ 个元 $-x_0, -x_1, \dots, -x_k$ 在 $(A_i, <)$ 上构成长为 k 的链. 由定义 2 所规定的全序集 $(A_i, <)$ 的排序方式并注意到 $d_i(x) = d_i(-x_i) (x \in A_i)$ 可知这条链可表示为 $-x_0 < -x_1 < \dots < -x_k$, 其起点 $-x_0 < x_0$. 因此原来给定的链 $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ 不是“起点按 $<$ 来说最前”的一条, 矛盾. 于是断言 $x_0 \in S_i$ 为真, 从而有 $[A_i] = 1 + k \leq 1 + l_i(x_0) \leq 1 + \max \{l_i(a) : a \in S_i\}$. 引理 3 得证. //

注意到, 如果对于 $a \in S_i$ 与任意 $y \in A_i$ 恒有 $|y - a| \notin S_i$, 那么据 $d_i(a)$ 与 $l_i(a)$ 的定义就有 $d_i(a) = 0$ 且 $l_i(a) = 0$. 根据引理 3 即得

引理 4 $\max \{d_i(a) : a \in S_i\} = 0 \Leftrightarrow [A_i] = 1$. //

3 计算多色 Ramsey 数下界的算法

上述理论为计算 $G_p(S)$ 的团数提供了一个新的思路. 在用计算机计算循环图的团数时, 通常是用深度优先搜索法 (depth-first search), 所需要的运算时间随着结点个数的增加而呈指数型的增长. 由于 $|A_i|$ 远远小于 p , 所以计算 $G_p[A_i]$ 的团数 (考察 $|A_i|$ 个结点) 要比计算 $G_p(S_i)$

的团数(要考察 p 个结点)容易得多.另一方面,由于 $(A, <)$ 的排序方式也能够节省回溯(backtracking)的运算量;设 $t = |S_i|$ 并且

$$(A, <) = \{a_1, -a_1, a_2, -a_2, \dots, a_t, -a_t\} \quad (1)$$

则有 $d(a_1) \leq d(a_2) \leq \dots \leq d(a_t)$. 除了 $d(a_i) = 0$ 的特殊情形,一般地说 $d_i(a_1)$ 要比 $d_i(a_t)$ 小得多,此时按照定义 3 依次计算 $l_i(a_1), l_i(a_2), \dots, l_i(a_t)$ 就能提高运算的效率.

现在给出计算多色 Ramsey 数 $R(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 的下界的一种算法,步骤如下:

1) 对于给定的 $n(n \geq 3)$ 个有序的整数 $q_1, q_2, \dots, q_n \geq 3$, 选取适当的素数 $p = 2m + 1$ 和 $[1, m]$ 的一个 n 部分拆 $S = [1, m] = \bigcup_{i=1}^n S_i$, 按照定义 1 作图 $G_p(S)$. 设 $i = 1$.

2) 设 $A_i = \{x: |x| \in S_i\}$. 对于 $a \in S_i$, 计算 $d_i(a) = |\{y \in A_i: |y - a| \in S_i\}|$. 如果 $\max\{d_i(a): a \in S_i\} = 0$, 根据引理 4 得 $[A_i] = 1$, 转到 6).

3) 根据定义 2 作全序集 $(A_i, <)$. 设这全序集的各元排列如(1)式, 令 $j = 1$.

4) 对于 $a_j \in S_i \cap A_i$, 根据定义 3 作起点为 a_j 的链. 如果存在一条长为 $k \geq q_i - 2$ 的起点为 a_j 的链, 运算结束; 否则, 根据定义 3 有 $l_i(a_j) \leq q_i - 3$.

5) 令 $j = j + 1$. 如果 $j \leq |S_i|$, 转到 4); 否则, 根据引理 3 有

$$[A_i] = 1 + \max\{l_i(a): a \in S_i\} \leq q_i - 2.$$

6) 令 $i = i - 1$. 如果 $i \leq n$, 转到 2); 否则, 对于 $i \in [1, n]$ 有 $[A_i] \leq q_i - 2$.

7) 根据引理 2, 得到 $G_p(S_i)$ 的团数 $= [A_i] + 1 \leq q_i - 1$, 其中 $i \in [1, n]$. 根据定理 2, 得到 $R([A_1] + 2, [A_2] + 2, \dots, [A_n] + 2) \geq p - 1$.

上述算法中的 1) 是给定初始数据, 此后计算机可按预先设计好的程序自动完成算法的整个过程. 显然只有输入经过精心设计的初始数据, 才能进入算法的最后一步成功地得到一个待定的多色 Ramsey 数的下界; 否则, 算法的过程将在 4) 结束运算, 此时可以考虑更新初始数据进行新一轮的运算.

上述算法是行之有效的. 下述例子得到迄今最好的下界 $R(3, 3, 4) \geq 30$.

例 $R(3, 3, 4) \geq 30$.

证 取 $n = 3, q_1 = q_2 = 3, q_3 = 4$. 选定素数 $p = 29$ 和 $[1, 14]$ 的一个 3 部分拆 $S = [1, 14] = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, 其中

$$S_1 = \{1, 4, 10, 12\},$$

$$S_2 = \{2, 5, 6, 14\},$$

$$S_3 = \{3, 7, 8, 9, 11, 13\}.$$

根据算法的第二步, 当 $i = 1, 2$ 时有

$$\max\{d_i(a): a \in S_i\} = 0.$$

故有 $[A_1] = [A_2] = 1$. 当 $i = 3$ 时有

$$(A_3, <) = \{7, -7, 9, -9, 13, -13, 3, -3, 8, -8, 11, -11\}.$$

进入算法的 4)、5), 得到 $\max\{l_i(a): a \in S_3\} = 1$, 其中长为 1 的以 $a \in S_3$ 为起点的链, 按照 $<$ 来说排列在最前面的一条为 $7 < -9$. 故由 5) 得到结论 $[A_3] = 2$. 由 6) 进入 7), 就得到结论 $R(3, 3, 4) \geq 30$.

这是计算多色 Ramsey 数的一个最简单的例子, 按照上述极其有效的算法, 甚至用手算也不会很困难. 用计算机完成上述算法所需要的运算时间远远不到 1 s (CPU: Pentium

200MMX).

4 定理 1 的证明

由于上述算法和所举的例子已经叙述得很具体了, 而且在给定初始数据以后计算机可按预先设计好的程序自动完成算法的整个过程, 因此在下述证明中我们略去算法一些细节的叙述, 仅写出构造图 $G_p(S)$ 的素数 p 和参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$ (注意到 $S = [1, m]$, 因此我们只写出 S_1, S_2, \dots, S_{n-1} 而不必写出 S_n), 并报告按照上述算法得到的 $[A_i] (i \in [1, n])$ 和完成算法全过程所需要的 CPU (Pentium 200MMX) 时间.

1) 取 $p = 313$, 整数 $n = 4$, 参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, 其中

$S_1 = \{15, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 29, 32, 34, 59, 67, 69, 75, 86, 92, 94, 100, 105, 117, 130, 131, 140, 143, 147, 156\}$,

$S_2 = \{1, 5, 7, 19, 23, 27, 33, 36, 44, 48, 58, 61, 64, 73, 79, 82, 93, 95, 103, 111, 113, 124, 133, 135, 148, 150\}$,

$S_3 = \{9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 43, 46, 47, 50, 65, 70, 78, 83, 85, 91, 98, 104, 119, 122, 123, 127, 142, 146, 149\}$,

根据上述算法, 得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 9$, 因此有 $R(3, 3, 3, 11) \geq 314$. 所用的 CPU 时间为 58 s.

2) 取 $p = 353$, 整数 $n = 4$, 参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, 其中

$S_1 = \{8, 11, 17, 44, 54, 64, 69, 74, 78, 83, 90, 97, 99, 103, 109, 112, 115, 130, 131, 136, 146, 150, 162, 165\}$,

$S_2 = \{22, 23, 24, 31, 32, 38, 39, 40, 51, 52, 65, 66, 68, 81, 85, 93, 94, 110, 122, 127, 128, 135, 155, 156, 164, 169, 171, 172\}$,

$S_3 = \{1, 12, 16, 20, 29, 34, 37, 42, 48, 56, 61, 70, 80, 88, 91, 102, 116, 119, 134, 142, 151, 159, 166, 170\}$,

根据上述算法, 得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 10$, 因此有 $R(3, 3, 3, 12) \geq 351$. 所用的 CPU 时间为 328 s.

3) 取 $p = 431$, 整数 $n = 4$, 参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, 其中

$S_1 = \{1, 3, 14, 18, 20, 26, 31, 37, 56, 61, 67, 72, 78, 83, 89, 95, 100, 106, 110, 116, 127, 138, 140, 146, 148, 157, 159, 163, 165, 170, 176, 180, 186, 192, 203\}$,

$S_2 = \{4, 13, 15, 16, 33, 40, 41, 51, 58, 69, 70, 76, 79, 87, 90, 93, 96, 101, 104, 107, 113, 118, 124, 132, 143, 161, 168, 178, 179, 185, 196, 204, 207, 210, 215\}$,

$S_3 = \{10, 28, 36, 39, 42, 47, 53, 54, 55, 71, 73, 74, 85, 88, 111, 114, 122, 131, 133, 134, 136, 137, 151, 152, 155, 171, 174, 200, 201, 214\}$,

根据上述算法, 得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 11$, 因此有 $R(3, 3, 3, 13) \geq 432$. 所用的 CPU 时间为 222 s.

4) 取 $p = 461$, 整数 $n = 4$, 参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, 其中

$S_1 = \{1, 12, 15, 39, 56, 61, 63, 66, 70, 72, 83, 88, 90, 93, 107, 110, 114, 116, 118, 134, 137,$

141,143,145,148,164,167,185,191,194,196,205,212,216,219},

$S_2 = \{3,14,18,29,37,41,48,49,53,54,60,64,69,75,79,80,81,100,119,125,131,136,142,146,151,157,163,170,182,197,201,208,209,213,214\}$,

$S_3 = \{6,28,33,35,36,43,45,58,59,67,74,82,96,97,98,106,108,120,121,128,135,138,147,150,158,159,160,162,169,177,189,199,200,211,223\}$,

根据上述算法,得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 12$,因此有 $R(3,3,3,14) \geq 462$. 所用的CPU时间为455 s.

5) 取 $p = 521$,整数 $n = 4$,参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$,其中

$S_1 = \{1,5,13,25,27,34,36,44,56,58,62,65,82,93,97,104,111,113,125,132,135,139,142,154,163,170,172,180,182,184,189,192,196,203,211,220,227,231,241,249\}$,

$S_2 = \{4,20,21,23,32,47,48,54,59,76,78,81,88,89,100,105,115,116,122,131,133,134,141,144,149,158,160,168,184,199,202,213,218,224,226,235,240,242,251,252\}$,

$S_3 = \{8,17,19,31,40,41,42,46,51,69,74,85,94,95,96,98,108,118,119,123,128,151,152,153,155,162,176,178,200,205,210,228,230,232,233,234,239,244,254,255\}$,

根据上述算法,得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 13$,因此有 $R(3,3,3,15) \geq 522$. 所用的CPU时间为902 s.

6) 取 $p = 617$,整数 $n = 4$,参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$,其中

$S_1 = \{14,17,19,23,41,45,54,56,66,69,74,87,116,117,129,137,144,149,150,155,159,180,181,184,187,192,202,212,214,220,227,230,251,262,263,264,269,290,291,295,302,306\}$,

$S_2 = \{27,28,34,35,36,37,46,51,77,89,90,91,108,115,120,132,162,163,170,172,174,175,176,177,193,194,217,232,233,234,236,243,255,256,257,258,274,288,298,299,300,305\}$,

$S_3 = \{1,11,18,25,33,60,62,65,75,88,97,102,105,110,114,118,126,142,146,152,154,156,161,166,169,173,195,197,200,203,209,237,246,250,267,273,277,281,286,289,293,301\}$,

根据上述算法,得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 14$,因此有 $R(3,3,3,16) \geq 618$. 所用的CPU时间为12 515 s.

7) 取 $p = 673$,整数 $n = 4$,参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$,其中

$S_1 = \{1,13,19,37,40,52,55,58,64,76,81,102,125,127,130,132,137,141,153,155,159,175,200,202,226,241,244,253,275,301,303,319,321,326,331\}$,

$S_2 = \{25,39,51,54,56,57,59,71,72,73,74,75,77,80,83,85,86,88,89,91,101,103,104,106,109,117,120,135,138,167,196,199,201,216,217,219,222,230,233,243,245,246,248,249,251,254,259,262,264,265,266,277,280,283,309,312\}$,

$S_3 = \{2,3,9,15,16,20,21,43,60,61,66,79,97,98,110,111,115,116,123,128,129,133,134,151,156,168,173,174,179,180,186,191,192,197,198,204,210,215,237,242,255,269,282,286,287,292,299,300,304,305,310,311,317,322,323,328\}$,

根据上述算法,得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 15$,因此有 $R(3,3,3,17) \geq 674$. 所用的 CPU 时间为 21 812 s.

8) 取 $p = 769$, 整数 $n = 4$, 参数集合 $S = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, 其中

$S_1 = \{6, 20, 21, 23, 31, 35, 60, 64, 68, 71, 93, 97, 109, 112, 122, 123, 125, 126, 134, 137, 138, 151, 163, 167, 203, 212, 229, 236, 240, 241, 253, 254, 255, 266, 269, 282, 298, 306, 331, 339, 343, 356, 357, 368, 371, 372, 383, 384\}$,

$S_2 = \{1, 4, 7, 12, 25, 30, 40, 45, 48, 53, 56, 59, 62, 67, 72, 77, 95, 100, 103, 108, 132, 141, 150, 152, 155, 160, 173, 179, 187, 193, 196, 202, 207, 210, 215, 220, 225, 228, 231, 234, 239, 248, 257, 262, 275, 280, 283, 289, 294, 309, 322, 327, 332, 335, 338, 341, 373, 379, 382\}$,

$S_3 = \{5, 9, 13, 17, 19, 33, 37, 44, 51, 55, 58, 78, 82, 86, 89, 96, 107, 127, 131, 135, 139, 143, 159, 166, 177, 184, 200, 204, 208, 211, 218, 222, 249, 261, 265, 267, 281, 285, 287, 295, 299, 303, 310, 326, 330, 334, 337, 344, 348, 360, 362, 364\}$,

根据上述算法,得到 $[A_1] = 1, [A_2] = 1, [A_3] = 1, [A_4] = 16$,因此有 $R(3,3,3,18) \geq 770$. 所用的 CPU 时间为 111 843 s.

参考文献

- 1 Ramsey F P. On a problem of formal Logic. Proc London Math, Soc 2nd Ser, 1930, 30: 264~286.
- 2 Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7: 1~7.
- 3 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994, DS1, updated on 7/9/1998.
- 4 Su Wenlong. The estimation of lower bounds about some Ramsey numbers $R_s(n)$ and $R_t(n)$. Guangxi Sciences, 1996, 3(3): 3~7.
- 5 罗海鹏, 苏文龙. 经典三色 Ramsey 数 $R(3,3,9)$ 的新下界. 广西计算机应用, 1998, (1): 17~18.
- 6 罗海鹏, 苏文龙. 经典三色 Ramsey 数 $R(3,3,11)$ 的新下界. 广西科学院学报, 1998, 14(3): 1~3.

(责任编辑: 黎贞崇)