第 15 卷第 4 期　　广 西 科 学 院 学 报　　Vol. 15, No. 4
1999 年 11 月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　November 1999

② 148-152　　O24 ~~O181~~ TH113.2

基于 Wu-Ritt 法的一类 TRUSS 问题符号解求法的设计与实现*

Design and Realization of TRUSS Problems Symbolic Solution Based on Wu-Ritt Method

周永权
Zhou Yongquan

（广西民族学院数学与计算机科学系　南宁　530006）
(Dept. of Math. & Comp. Guangxi Univ. for Nationalities, Nanning, 530006)

摘要　以机械运动学中一类简单的 TRUSS 问题为例，探讨 Wu-Ritt 方法在非线性计算几何中的应用，重点研究逆 TRUSS 问题，借助于 Mathematica for Windows 给出求这类 TRUSS 问题的符号解系统.

关键词　Wu-Ritt 方法　约化　TRUSS 问题　符号计算　符号解　机械运动学
中图法分类号　O 122.2; TP 301.6

Abstract　Taking some TRUSS problems' examples from kinematics of machinery, we discussed the applications of Wu-Ritt method in nonlinear computational geometry. Inverse TRUSS problems were as the stress. With the aid of Mathematica for windows, a symbolic computation system of TRUSS problems was extracted.

Key words　Wu-Ritt method, reduction, TRUSS problems, symbolic computation, symbolic solution

近年吴文俊先生利用代数方程表示几何定理，建立的 Wu-Ritt 消去方法（简称吴方法）的理论已经在几何定理证明方面取得巨大成功[1]. 借助于计算机进行定理证明和符号计算[2]. 且逐渐推广到许多领域的计算问题. 本文试图用 Wu-Ritt 方法解决一类典型的实用的 TRUSS 问题（图 1）. 由于该问题转化为数学问题对应的方程中出现正、余弦，导致整个问题是非线性的. 用数值计算方法（如 Newton-Raphson 方法）难于得到问题的精确解. 我们可用 Wu-Ritt 方法得到该问题的精确解，即符号解. 本文重点讨论逆 TRUSS 问题的符号解的求法，它可作为设计人员的辅助工具.

1　一类简单的 TRUSS 问题

首先，我们考察简单对称的 TRUSS 问题（图 1），当 θ_1,θ_2 为常数时，问题简单，不予考查. 考查一般情形，当 θ_1,θ_2 为任意值时，据图 1 及几何背景转化为以下对应的基本三角方程：

1999-03-31 收稿，1999-04-26 修回。
* 广西民族学院青年基金项目。

$$F_1 \equiv \cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$F_2 \equiv \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 - 1 = 0. \tag{2}$$

在此基础上，我们用(AB)，(AD) 和(BD) 表示 AB，AD 和 BD 承受的力，在通常意义下，TRUSS 受的张力用“＋”表示，压力用“－”表示，在 TRUSS 每一支点处，例如在 A 点处，有以下相互独立的平衡方程：

$$F_3 \equiv (AB)\cos\theta_2 + (AD)\cos\theta_1 = 0. \tag{3}$$

$$F_4 \equiv (AB)\sin\theta_2 + (AD)\sin\theta_1 + A_y = 0, \tag{4}$$

$$F_5 \equiv 2(AD)\sin\theta_1 - (BD) = 0. \tag{5}$$

$$F_6 \equiv 2(AB)\sin\theta_2 + (BD) + F_y = 0. \tag{6}$$

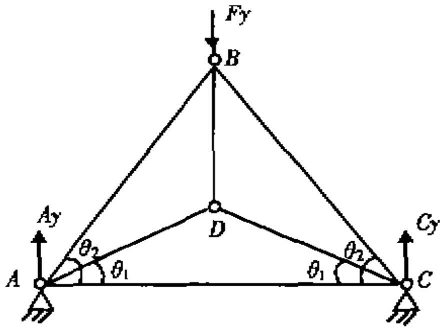

图 1　一类简单的 TRUSS 问题

其中(1)，(2) 在应用 Wu-Ritt 方法时，添进去两个方程。首先，据 Wu-Ritt 算法的原理将方程代数化，置

$$\cos\theta_1 = x_1, \qquad \sin\theta_1 = u_1;$$

$$\cos\theta_2 = x_2, \qquad \sin\theta_2 = u_2.$$

于是方程转化为：

$$F_1 \equiv u_1^2 + x_1^2 - 1 = 0,$$

$$F_2 \equiv u_2^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$

$$F_3 \equiv (AB)x_2 + (AD)x_1 = 0,$$

$$F_4 \equiv (AB)u_2 + (AD)u_1 + A_y = 0,$$

$$F_5 \equiv 2(AD)u_1 - (BD) = 0,$$

$$F_6 \equiv 2(AB)u_2 + (BD) + F_y = 0.$$

现在，我们已用非线性高次代数方程表示 TRUSS 问题，以下具体讨论使用 Wu-Ritt 方法求 TRUSS 问题的符号解.

2　使用 Wu-Ritt 方法求 TRUSS 问题的符号解

Wu-Ritt 消去法的优势在于能把计算高次非线性多元方程零点问题转化成去计算它等价的一元高次多项式方程零点问题，根据这个思想，首先，我们对变元 u_2, u_1, x_1, x_2 给定一消去次序：

$$u_2 < u_1 < x_2 < x_1.$$

(Ⅰ)如果我们希望找到(AB)，(AD)，(BD) 和 F_y 之间的关系. 考查方程组 $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, F_5 = 0, F_6 = 0$. 依 Wu-Ritt 消去法在序 $u_2 < u_1 < x_2 < x_1$ 下，对变元 u_2, u_1, x_2, x_1 依次约化得：

$$G_1 \equiv 2(AB)x_2^2 - 2(AB) - ((BD) + F_y)u_2 \text{MOD } (F_2, F_6),$$

$$\equiv 4(AB)^2x_2^2 - 4(AB)^2 + (BD)^2 + 2(BD)F_y + F_y^2 \text{MOD } (F_2, F_6),$$

同理 $G_2 \equiv 2(AD)x_1^2 - 2(AD) + (BD)u_1 \text{MOD } (F_1, F_5)$,

$$\equiv 4(AD)^2x_1^2 - 4(AD)^2 + (BD)^2 \text{MOD } (F_1, F_5),$$

$$G_3 \equiv 4(AB)(AD)x_2x_1 + 4(AB)^2 - (BD)^2 - 2(BD)F_y - F_y^2 \text{MOD } (F_3, G_1).$$

$\equiv 4(AD)x_1^2 - 4(AB)^2 + (BD)^2 + 2(BD)F_y + F_y^2 \mathrm{MOD}\ (F_3, G_1)$,

$G \equiv -2(BD)F_y - F_y^2 - 4(AD)^2 + 4(AB)^2 \mathrm{MOD}\ (G_2, G_3)$,

即： $-2(BD)F_y - F_y^2 - 4(AD)^2 + 4(AB)^2 = 0$. (7)

我们找到力 (AB)，(AD)，(BD) 和 F_y 所满足的约束条件方程.

（Ⅰ）在 TRUSS 问题中，关键问题是如何确定 θ_1, θ_2 的大小. 如我们事先知道 F_y 及 (AB)，(AD) 的大小（显然，可以用 (BD) 代替 (AB) 和 (AD) 求 θ_1, θ_2 的大小，即是前面本文提到的逆 TRUSS 问题. 我们应用类似(1) Wu-Ritt 方法，考查方程组

$F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, F_5 = 0, F_6 = 0$ 在序：

$u_2 < u_1 < x_2 < x_1 < (BD)$ 下，对变元 $u_2, u_1, x_2, x_1, (BD)$，

依次约化得：

$$4(AD)F_y \sin\theta_1 + F_y^2 - 4(AB)^2 + 4(AD)^2 = 0, \tag{8}$$

即：$\sin\theta_1 = -[F_y^2 - 4(AB)^2 + 4(AD)^2/4(AD)F_y]$.

这样据(8)确定出 θ_1 的大小.

（Ⅱ）同理，我们得到 $\sin\theta_2$：

$$\sin\theta_2 = -[F_y^2 - 4(AD)^2 + 4(AB)^2/4(AB)F_y]. \tag{9}$$

据(9)我们确定出 θ_2 的大小.

（Ⅳ）如果，我们希望确定 $\cos\theta_1$，只要考查方程组

$F_1 = 0, F_2 = 0,\ F_3 = 0,\ F_5 = 0, F_5 = 0$ 在序：

$u_2 < u_1 < x_2 < x_1 < (BD)$ 下，对变元 $u_2, u_1, x_2, x_1, (BD)$ 依次约化得：

$$\cos^2\theta_1 = \frac{-F_y^4 + 8(AB)^2F_y^2 + 24(AD)^2F_y^2 + 32(AB)^2(AD)^2 - 16(AD)^4 - 16(AB)^4}{16(AD)^2F_y^2}, \tag{10}$$

对应地

$$\cos^2\theta_2 = \frac{-F_y^4 + 24(AB)^2F_y^2 + 8(AD)^2F_y^2 + 32(AB)^2(AD)^2 - 16(AD)^4 - 16(AB)^4}{16(AB)^4F_y^2}. \tag{11}$$

3 求 TRUSS 问题符号解的源程序

下面借助于 Mathmatica for Windows 系统，在交互式工作下，给出源程序：

源程序 1：找力 (AB)、(AD)，(BD)，(Fy) 之间的关系

In[1]：$= F_1 = u_1\hat{}\ 2 + x_1\hat{}\ 2 - 1$

Out[1]：$= -1 + u_1^2 + x_1^2$

In[2]：$= F_2 = u_2\hat{}\ 2 + x_2\hat{}\ 2 - 1$

Out[2]：$= -1 + u_2^2 + x_2^2$

In[3]：$= F_3 = (AB) * x_2 + (AD) * x_1$

Out[3]：$= AD\ x_1 + AB\ x_2$

In[4]：$= F_4 = (AB) * u_2 + (AD) * u_1 - A_y$

Out[4]：$= A_y + AD\ u_1 + AB\ u_2$

In[5]：$= F_5 = 2 * (AD) * u_1 - (BD)$

Out[5]：$= -BD + 2AD\ u_1$

In[6]: $= F_6 = 2*(AB)*u_2 + (BD) + F_y$

Out[6]: $= BD + F_y + 2AB\,u_2$

In[7]: $= 2*(AB)*\%2 - u_2*\%6$

Out[7]: $= -(u_2(BD + F_y + 2AB\,u_2)) + 2AB(-1 + u_2^2 + x_2^2)$

In[8]: = Simplify[%7]

Out[8]: $= -2AB - BD\,u_2 - F_y u_2 + 2AB\,x_2^2$

In[9]: $= 2*(AB)\%8 + (BD + F_y)*\%6$

Out[9]: $= (BD + F_y)(BD + F_y + 2AB\,u_2) + 2AB(-2AB - BD\,u_2 - F_y u_2 + 2AB\,x_2^2)$

In[10]: = Simplify[%9]

Out[10]: $= -4AB^2 + BD^2 + 2BD\,F_y + F_y^2 + 4AB^2\,x_2^2$

In[11]: $= 2*(AD)*\%1 - u_1*\%5$

Out[11]: $= -(u_1(-BD + 2AD\,u_1)) + 2AD(-1 + u_1^2 + x_1^2)$

In[12]: = Simplify[%11]

Out[12]: $= -2AD + BD\,u_1 + 2AD\,x_1^2$

In[13]: $= 2*AD*\%12 - BD*\%5$

Out[13]: $= -(BD(-BD - 2AD\,u_1)) + 2AD(-2AD + BD\,u1 + 2AD\,x_1^2)$

In[14]: = Simplify[%13]

Out[14]: $= -4AD^2 + BD^2 + 4AD^2\,x_1^2$

In[15]: $= 4*AB*x_2*\%3 - \%10$

Out[15]: $= 4AB^2 - BD^2 - 2BD\,F_y - F_y^2 - 4AB^2\,x_2^2 + 4AB\,x_2(AD\,x_1 + ABx_2)$

In[16]: = Simplify[%15]

Out[16]: $= 4AB^2 - BD^2 - 2BD\,F_y - F_y^2 + 4AB\,AD\,x_1\,x_2$

In[17]: $= 4*AD*x_1*\%3 - \%16$

Out[17]: $= -4AB^2 + BD^2 + 2BD\,F_y + F_y^2 - 4AB\,AD\,x_1\,x_2 + 4AD\,x_1(AD\,x_1 + AB\,x_2)$

In[18]: = Simplify[%17]

Out[18]: $= -4AB^2 + BD^2 + 2BD\,F_y + F_y^2 + 4AD^2x_1^2$

In[19]: $= \%14 - \%17$

Out[19]: $= 4AB^2 - 4AD^2 - 2BD\,F_y - F_y^2 + 4AD^2x_1^2 + 4AB\,AD\,x_1\,x_2 - 4ADx_1(AD\,x_1 + AB\,x_2)$

In[20]: = Simplify[%19]

Out[20]: $= 4AB^2 - 4AD^2 - 2BD\,F_y - F_y^2$

/*　源程序 2:求 $\sin\theta_1$ 的符号解　*/

In[21]: $= x_1*\%3 - (AD)*\%1$

Out[21]: $= -(AD(-1 + u_1^2 + x_1^2)) + x_1(AD\,x_1 + AB\,x_2)$

In[22]: = Simplify[%9]

Out[22]: $= AD - AD\,u_1^2 + AB\,x_1\,x_2$

In[23]: $= x_2*\%3 - (AB)*\%2$

Out[23]: $= x_2(AD\,x_1 + AB\,x_2) - AB(-1 + u_2^2 + x_2^2)$

In[24]: = Simplify[%23]

Out[24]: $= AB - AB\,u_2^2 + AD\,x_1\,x_2$

In[25]: $= (AD)*\%22 - (AB)*\%24$

Out[25]: $= AD(AD - AD\,u_1^2 + AB\,x_1\,x_2) - AB(AB - AB\,u_2^2 + AD\,x_1\,x_2)$

In[26]: = Simplify[%25]

Out[26]: $= -AB^2 + AD^2 - AD^2\,u_1^2 + AB^2\,u_2^2$

In[27]: = 2 * %26 − (AB) * u_2 * %6

Out[27]: = $-(AB\,u_2(BD+F_y+2AB\,u_2))+2(-AB^2+AD^2-AD^2u_1^2+AB^2u_2^2)$

In[28]: = Simplify[%27]

Out[28]: = $-2AB^2+2AD^2-2AD^2-2AD^2u_1^2-AB\,BD\,u_2-AB\,F_y\,u_2$

In[29]: = 2 * %28 + $(BD+F_y)$ * %6

Out[29]: = $(BD+F_y)(BD+F_y+2AB\,u_2)+2(-2AB^2+2AD^2-2AD^2u_1^2-AB\,BD\,u_2$ $-AB\,F_y\,u_2$

In[30]: = Simplify[%29]

Out[30]: = $-4AB^2+4AD^2+BD^2+2BD\,F_y+F_y^2-4AD^2u_1^2$

In[31]: = Solve[%20 == 0, BD]

Out[31]: = $\{\{BD\longrightarrow(4AB^2-4AD^2-F_y^2)/2F_y\}\}$

In[32]: = %30 − 4 * AB ^ 2 + 4 * AD ^ 2 + (4 * AB ^ 2 − 4 * AD ^ 2 − Fy ^ 2) ^ 2/(4 * Fy ^ 2) + 2 * (4 * AB ^ 2 − 4 * AD ^ 2 − Fy ^ 2)/(2 * Fy) * Fy + Fy ^ 2 − 4 * AD ^ 2 * u_1 ^ 2

Out[32]: = $(4*AB^2-4AD^2-F_y^2)2/4*F_y^2-4AD^2u_1^2$

In[33]: = Solve[%32, u_1]

Out[33]: = $\{\{u_1\longrightarrow-(-4AB^2+4AD^2+F_y^2)/4ADF_y\}$,

$\{u_2\longrightarrow(-4AB^2+4AD^2+F_y^2)/4ADF_y\}\}$

/* 源程序3:求 $\cos\theta_1$ 的符号解 */

In[34]: = %18/* 调用Out[18],将 BD 的表达式代入 */

− 4 * AB ^ 2 + (4 * (AB) ^ 2 − 4 * (AD) ^ 2 − Fy ^ 2) ^ 2/(4 * Fy ^ 2) + 2 * (4 * (AB) ^ 2 − 4 * (AD) ^ 2 − Fy ^ 2)/(2 * Fy) * Fy + 4 * (AD) ^ 2 * x_1 ^ 2

Out[34]: = $-4AD^2-(4AB^2-4AD^2-F_y^2)^2/(4F_y^2)+4AB^2x_1^2$

In[35]: = Simplify[%34]

Out[35]: = $-16AD^2F_y^2-(4AB^2-4AD^2-F_y^2)^2+16AB^2F_y^2x_1^2$

In[36]: = Solve[%35, x_1]

Out[36]: = $\{\{x_1\longrightarrow-$ sqrt$[16AB^4-32AB^2AD^2+16AD^4-8AB^2F_y^2+24AD^2F_y^2+F_y^4]/(4AB\,F_y)\}$,

$\{x_2\longrightarrow$ sqrt$[16AB^4-32AB^2AD^2+16AD^4-8AB^2F_y^2+24AD^2F_y^2+F_y^4]/(4AB\,F_y)\}\}$

参考文献

1. 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理（初等几何部分）. 计算机科学丛书. 北京：科学出版社，1984.
2. Chou S C. Mechanical geometry theorem proving. Ist Edn. Redel Dordrecht. 1988.
3. Ioakimidis N I, Anastasselou E G. Grobner bases in TRUSS problems with maple. Computer & Structures. 1994, 52 (5): 1093～1096.
4. 周永权. Wu-Ritt 方法在 TRUSS 问题中的应用. 计算机应用研究，1997，14 (4): 135～136.

（责任编辑：黎贞崇）