第 16 卷第 2 期　　广西科学院学报　　Vol. 16, No. 2
2000 年 5 月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　May 2000

对偶模的 FGT-维数
FGT-Dimension of Dual Module

唐金玉
Tang Jinyu

（广西大学数学与信息科学系　南宁　530004）
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ. Nanning, 530004)

摘要　利用有限生成无挠模的对偶模刻画 C- 正则环及 FGT-弱整体维数有限的 Π-凝聚环.

关键词　Π-凝聚环　有限生成无挠模　FGT-内射

中图法分类号　O 153.3

Abstract　C- regular rings and Π-coherent rings of finite FGT-weak global dimension have been characterized using the dual modules of finitely generated torsionles.

Key words　Π-coherent, finitely generated torsionless, FGT-injective modules

在本文中, R 表示有单位元的结合环, $M_R({}_RM)$ 表示右(左)R- 模 M, 用 $(-)^*$ 表示对偶模 $\mathrm{Hom}_R(-、R)$, 用 f.g. 表示"有限生成".

设 R 是一个环, 若每个 f.g. 无挠左(右)R- 模是有限表现的, 则称 R 为左(右)Π- 凝聚环[1]. 由文献[1]知, R 是左(右)Π- 凝聚环当且仅当每个 f.g. 无挠右(左)R- 模 A, A^* 是有限生成无挠的. 模${}_RM$ 称为 FGT- 内射的, 若对每个 f.g. 无挠左 R- 模 A, $\mathrm{Ext}_R^1(A,M)=0$; 而用 $\mathrm{Inf}\{n\,|\,\mathrm{Ext}_{n+1}^R(A,M)=0$, 对任意 f.g. 无挠模${}_RA\}$ 称为 M 的 FGT- 内射维数, 表示为 FGT-$\mathrm{Id}_R(M)$; 同理可定义 FGT- 平坦模、模 M 的 FGT- 平坦维数(表示为 FGT-$\mathrm{fd}_R(M)$); 而用 $\sup\{r.\ \mathrm{FGT}-\mathrm{fd}_R(M)\,|$ 任意右 R- 模 $M\}$ 表示环 R 的右 FGT- 弱整体维数, 表示为 $r.$ FGT-WD(R)[1].

左 R- 模 M 的子模 K 称为 M 的闭子模, 若 $K=\mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_{M^*}(K))$[2], 由文献[2]知 K 是 M 的闭子模当且仅当 M/K 是无挠的; 模 A 是无挠的当且仅当存在正合列 $0\rightarrow A\rightarrow \prod\limits_I R$, 对某个指标集 I[2].

文献[3]定义了 C- 正则环, 即若每个 f.g. 自由左 R- 模 F 的每个闭子模都是 F 的直和项, 则称 R 为左 C- 正则环; 且证明了 R 是左 C- 正则环当且仅当 R 是右 C- 正则环当且仅当每个模都是 FGT- 内射模.

本文刻画了 f.g. 无挠模的对偶模的同调维数及 FGT- 弱整体维数有限的 Π- 凝聚环, 推广

1999-08-03 收稿。

了 Marsha Finkel Jones and Mark L. Teply 在文献[4]中的主要结果.

引理1 若 $0\to K\to F\xrightarrow{g}T$ 是 R-模正合列,其中 F 是f.g.自由模,T 是无挠模,则 $K\cong C^*$,其中,$C=\mathrm{Coker}(g^*)$ 是f.g.无挠的,且若 T 是f.g.自由模,则 C 为有限表现模[4].

定理1 下列陈述等价:

1)R 是 C-正则环;

2)对任意f.g.无挠模 M_R(或$_RM$),M^* 是FGT-内射的;

3)R 是Π-凝聚环,且对任意f.g.无挠模 M_R(或$_RM$),M^{**} 为FGT-内射的;

4)对左(或右)R-模正合列 $0\to N\to R^m\to R^J$,其中 m 为自然数,J 为某指标集,都有 N 是FGT-内射的.

证明 2)⇒1):任意f.g.自由模 F 的闭子模 K,有正合列:

$$0\to K\to F\to M\to 0 \tag{1}$$

其中 $M\cong F/K$,是f.g.无挠的,从而有正合列 $0\to M^*\to F^*\to C\to 0$,由引理1,$C^*\cong K$,且 C 是f.g.无挠的,由2),K 为FGT-内射模,于是 $\mathrm{Ext}_R^1(M,K)=0$,故正合列(1)分裂正合,K 是 F 的直和项,即 R 是 C-正则环.

1)⇒4):由文献[3]定理2知成立.

4)⇒2):任意f.g.无挠模 M,有正合列 $R^{(J)}\to R^m\to M\to 0$,其中 m 为自然数,J 为某指标集,有正合列 $0\to M^*\to R^m\to R^J$. 由4)知 M^* 是FGT-内射的.

2)⇒3):先证 R 是左Π-凝聚环. 对任意f.g.无挠模$_RM$,有正合列(1)式,由2)⇒1)的证明知(1)式分裂正合,M 为 F 的直和项,故 M 为f.g.投射模,是有限表现的,于是 R 为左Π-凝聚环. 同理可证 R 为右Π-凝聚环. 其次,对任意f.g.无挠左(或右)R-模 M,M^* 也是f.g.无挠的,由2),M^{**} 是FGT-内射的.

3)⇒2):对任意f.g.无挠左(或右)R-模 M,M^* 为f.g.无挠左(或右)R-模,由3),M^{***} 为FGT-内射的,M^* 作为 M^{***} 的直和项,也是FGT-内射的.

定理2 对任意环 R,任意非负整数 n,下列陈述等价:

1)任意f.g.无挠模 M_R,$\mathrm{pd}_R(M^*)\leqslant n$;

2)任意f.g.无挠模$_RP$,$\mathrm{pd}_R(P)\leqslant n+1$.

证明 1)⇒2):任意f.g.无挠左 R-模 P,有正合列 $0\to K\to F\to P\to 0$ 及 $0\to P^*\to F^*\to C\to 0$,其中 F 为f.g.自由模,C 为f.g.无挠模,由引理1,$C^*\cong K$,于是 $\mathrm{pd}_R(K)\leqslant n$,从而 $\mathrm{pd}_R(P)\leqslant n+1$.

2)⇒1):对任意f.g.无挠模 M_k,有正合列 $0\to K\to F\to M\to 0$ 及 $0\to M^*\to F^*\to C\to 0$,其中 F 为f.g.自由模,C 为f.g.无挠模,且 $C^*\cong K$,因 $\mathrm{pd}_R(C)\leqslant n+1$,故 $\mathrm{pd}_R(M^*)\leqslant n$.

同理可证如下定理.

定理3 对任意环 R 及任意非负整数 n,下列陈述等价:

1)任意f.g.无挠模 M_R,$\mathrm{fd}_R(M^*)\leqslant n$;

2)任意f.g.无挠模$_RP$,$\mathrm{fd}_R(P)\leqslant n+1$.

引理2 设 R 是右Π-凝聚环,A 是f.g.无挠右 R-模,n 为非负整数,则 $\mathrm{fd}_R(A)\leqslant n$,当且仅当 $\mathrm{pd}_R(A)\leqslant n$.

证明 "⇐":显然.

"⇒":对任意f.g.无挠右 R-模 A,A 是有限表现模,从而有自由分解

$0 \to K_n \to F_{n-1} \to F_{n-2} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$,

其中 $F_i(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 是 f.g. 投射模，K_n 是有限生成无挠模，从而有限表现，由 $\mathrm{fd}_R(A) \leqslant n$ 知 K_n 平坦，故 K_n 投射，于是 $\mathrm{pd}_R(A) \leqslant n$.

定理 4 设 R 是左、右 Π- 凝聚环，$n \geqslant 2$ 为整数，下列陈述等价：

1) $r.\mathrm{FGT}-\mathrm{WD}(R) \leqslant n$；

2) $\mathrm{fd}_R(M^*) \leqslant n-2$，对任意 f.g. 无挠模 $_RM$；

3) $\mathrm{pd}_R(M^*) \leqslant n-2$，对任意 f.g. 无挠模 $_RM$；

4) 对任意 f.g. 自由左 R- 模 F 的闭子模 K，$\mathrm{pd}_R(K) \leqslant n-1$；

5) 对任意自然数 $K \leqslant n$，若有右 R- 模正合列 $0 \to X \to R^{J_1} \to \cdots \to R^{J_{k-1}} \to R^{J_K}$

其中，$J_1, J_2, \cdots J_{k-1}, J_k$ 是指标集，都有

$r.\mathrm{FGT}\text{-}\mathrm{fd}_R(X) \leqslant n-K$；

6) $\mathrm{fd}_R(M^*) \leqslant n-2$，对任意左 R- 模 M.

证明 1)⇒4)：对任意 f.g. 自由左 R- 模 F 的闭子模 K，F/K 是 f.g. 无挠的，由 1)，$\mathrm{fd}_R(F/K) \leqslant n$，由引理 2，$\mathrm{pd}_R(F/K) \leqslant n$，于是 $\mathrm{pd}_R(K) \leqslant n-1$.

2)⇒3)：由引理 2 知成立.

4)⇒1)：对任意 f.g. 无挠模 $_RN$，有 $N \cong F/K$，其中 F f.g. 自由，K 是 F 的闭子模，由 4)，$\mathrm{pd}_R(K) \leqslant n-1$，从而 $\mathrm{pd}_R(N) \leqslant n$，于是 $\mathrm{fd}_R(N) \leqslant n$，即 $r.\mathrm{FGT}-\mathrm{WD}(R) \leqslant n$.

1)⇒2)：对任意 f.g. 无挠模 $_RM$，M 为有限表现模，有正合列

$$0 \to K \to F_1 \xrightarrow{g} F_0 \to M \to 0, \tag{2}$$

其中 F_0, F_1 是 f.g. 自由左 R- 模，K 是 f.g. 无挠的，由引理 1，又有正合列

$$0 \to M^* \to F_0{}^* \xrightarrow{g^*} F_1^A \to C \to 0, \tag{3}$$

且 C 为 f.g. 无挠模，$C^* \cong K$，由 1)，$\mathrm{fd}_R(C) \leqslant n$，从而 $\mathrm{fd}_R(M^*) \leqslant n-2$.

2)⇒1)：对任意 f.g. 无挠左 R- 模 M，有正合列(2)、(3) 式，由 2)，$\mathrm{fd}_R(C^*) \leqslant n-2$，即 $\mathrm{fd}_R(K) \leqslant n-2$，故 $\mathrm{fd}_R(M) \leqslant n$，从而 $r.\mathrm{FGT}\text{-}\mathrm{WD}(R) \leqslant n$.

1)⇒5)：若存在左 R- 模正合列

$0 \to X \to R^{J_1} \to R^{J_2} \to \cdots \to R^{J_K} \to C \to 0$,

因 R 是右 Π- 凝聚环，故 $R^{J_i}(1 \leqslant i \leqslant K)$ 平坦，也是 FGT- 平坦的，由(1) 式，$\mathrm{FGT}\text{-}\mathrm{fd}_R(C) \leqslant n$，故 $\mathrm{FGT}\text{-}\mathrm{fd}_R(X) \leqslant n-K$.

5)⇒6)：任意左 R- 模 M，有正合列

$R^{(J_2)} \to R^{(J_1)} \to M \to 0$,

其中 $R^{(J_2)}$、$R^{(J_1)}$ 是自由模，从而又有正合列

$0 \to M^* \to R^{J_1} \to R^{J_2}$，由 5)，$\mathrm{FGT}\text{-}\mathrm{fd}_R(M^*) \leqslant n-2$.

6)⇒2)：显然.

推论：设 R 是左、右 Π- 凝聚环，下列陈述等价：

1) $\mathrm{FGT}\text{-}\mathrm{WD}(K) \leqslant 2$；

2) 对每个 f.g. 无挠左 R- 模 $_RM$，M^* 是投射的；

3) 对每个 f.g. 无挠 R- 模 $_RM$，M^* 是平坦的；

4) 对任意 f.g. 自由模 F 的闭子模 K，$\mathrm{pd}_R(K) \leqslant 1$；

5）**对任意模** M，M^* **是平坦的**；

若在正合列 $0 \to X \to R^{J_1} \to R^{J_2}$，**则** X **是** FGT- **平坦的**.

参考文献

1 Cheng Fuchang，Tang Jinyu，Huang Zhaoyong. Π-coherent rings and FGT-injective dimension. SEA Bull Math，1995，19（3）：105～112.

2 Carl Faith. Algebra I Rings，Modules and categories. springer-verlag Berlin Heidelberg，New York，1976.

3 唐金玉．关于C-遗传环和C-正则环．广西大学学报，1998，4：351～354.

4 Marsha Finkel Jones，Mark L Teply. Coherent rings of finite weak global dimension. Com in Alg，1982，10（5）：493～503.

（责任编辑：黎贞崇）