第 16 卷第 4 期,增刊　　广西科学院学报　　Vol. 16, No. 4 & Supplement
2000 年 11 月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　November 2000

有向图的同构
Digraph′s Isomorphism

罗示丰
Luo Shifeng

(广西大学计算机与信息工程学院　南宁　530004)
(College of Computer & Information Engineering, Guangxi University, Nanning, 530004)

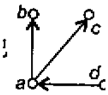
摘要　证明"图 G 与图 F 同构当且仅当它们有相合的 VC 算法"的结论，对于简单有向图依然成立。

关键词　有向图　同构　VC 算法
中图法分类号　TP 301.6

Abstract　The sufficient and neccessary condition of two digraphs' isomorphism is that they have a coincidental VC algorithm, which is proved.

Key words　digraph, isomorphism, VC algorithm

1　有向图的表示

① 有向图 $G=\langle V,E\rangle$ 的某个顶点的度数是指该顶点的出度与入度之和；② 有向图 $G=\langle V,E\rangle$ 的顶点 V_i 与 V_j 的度数相等是指它们的出度与入度之和相等且出度(或入度)相等；③用分号来区分一个顶点的出度和入度。例如，我们把  表示成 $V_a^{b,c;d}$。

2　定理的证明

定理　简单有向图 $G=<V,E>$ 与 $F=<U,W>$ 同构当且仅当它们有相合的 VC 算法[1]。

证明　(1) 必要性。设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}f:V\to U$ 是双射函数，对于 $i=1,2,\cdots,n(f(v_i)=f(u_i)$，且 $<v_i,v_j>\in E\leftrightarrow<f(v_i)f(u_j)>\in W$，在此情况下，我们证明图 $G=<V,E>$ 与 $F=<U,W>$ 有相合的 VC 算法。

由图 G 和图 F 同构推知，它们对应顶点必然是度数相同的。因而，图 G 的度数最大的顶点(假定是 v_i)必然对应着图 F 的度数最大的顶点(u_1)，而且，凡是和 v_1 相邻接的顶点也必然对应着和 u_1 相邻接的顶点。下面看图 G 和图 F 在删除 v_1 及其关联边，u_1 及其关联边后，它们的顶点数、度数的变化；各自减少了一个顶点(v_1 和 u_1)；G 中与 v_1 相邻接的顶点，其度数都减少 1，与 v_1

2000-08-04 收稿。

不邻接的顶点，其度数不变；F 中与 u_1 相邻接的顶点，其度数都减少 1，与 u_1 不邻接的顶点，其度数不变。因此，对于子图 $G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$ 和 $F_1 = \langle U_1, W_1\rangle$($V_1 = V - \{V_1\}$，$E_1 = E - \{$与 v_1 关联的边$\}$，$U_1 = U - \{u_1\}$，$W_1 = W - \{$与 u_1 关联的边$\}$）的顶点数是相等的，度数相同的的顶点数也是相等的。类似的分析 G_2 对 F_2 与，……G_1 与 F_1(G_{l+1} 是 F_{l+1} 零图）也是适用的。因而，图 G 和图 F 有相合的 VC 算法。

(2) 充分性。若图 G 与图 F 有相合的 VC 算法，推证图 G 与 F 同构。设在 VC 算法下有

$\mathrm{VC}(G) = \{V_{v_1}^{\{v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1K_1}; v_{1(k_1+1)}, \cdots, v_{1P_1}\}}, V_{v_2}^{\{v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2K_2}; v_{2(K_2+1)}, \cdots, v_{2P_2}\}}, \cdots,$
$V_{v_l}^{\{v_{l1}, v_{l2}, \cdots, v_{l(K_l+1)}, \cdots, v_{lP_l}\}}\}$，

其中 $\forall\ v_x \in V, \forall\ v_{xy} \in V, 1 \leqslant x \leqslant l, 1 \leqslant y \leqslant P_x$

和 $\mathrm{VC}(F) = \{V_{u_1}^{\{u_{11}, \cdots, u_{1k_1}; u_{1(k_1+1)}, \cdots, u_{1P_1}\}}, V_{u_2}^{\{u_{21}, \cdots, u_{2k_2}; u_{2(K_2+2)}, \cdots, u_{2P_2}\}}, \cdots, V_{u_l}^{\{u_{l1}, \cdots, u_{1k_1}; u_{l(k_l+1)}, \cdots, u_{lP_l}\}}\}$，

（其中 $\forall\ u_x \in U, \forall\ u_{xy} \in U, 1 \leqslant x \leqslant l, 1 \leqslant y \leqslant p_x$）

我们首先建立映射 $f: \{v_1, v_2, \cdots, v_l\} \to \{u_1, u_2, \cdots, u_l\}$，

令 $f(v_1) = u_1, f(v_2) = u_2, \cdots, f(v_1) = u_1$，

如果 $v_i \in (V - \{v_1, v_2, \cdots, v_l\}) \bigcap \{v_{j1}, \cdots, v_{jk_j}; v_{j(k_j+1)}, \cdots, v_{jp_j}\}$，

$u_i \in (U - \{u_1, u_2, \cdots, u_l\}) \bigcap \{u_{j1}, \cdots, u_{jk_j}; u_{j(k_j+1)}, \cdots, u_{jp_j}\} (1 \leqslant j \leqslant l)$，

且 v_i 与 u_i 有相同的度数（它们在 VC() 式中出现的次数即它们的度数），则令

$f(v_i) = u_i.$

由于图 G 和图 F 的所有的边都分别出现在它们各自的 VC() 式中，因而，它们的顶点也就全部出现在它们各自的 VC() 式中。从而这样的函数必为双射函数。在这个映射之下，我们证明有

$< v_x, v_y > \in E \leftrightarrow < f(v_x), f(v_y) > \in w$，

如上所述，图 G 的所有边都出现在其 VC(G) 中，假设 $< v_x, v_y >$ 就是其中 $V^{\{v_{x1}, \cdots, v_{xk_x}; v_{x(k_x+1)}, \cdots, v_{xP_x}\}}$ 的 $< v_x, v_{xk_x} >$ 即 $v_y = v_{xk_x}$。按双射函数 f 的构造方法，$f(v_x) = u_x, f(v_y) = f(v_{xk_x}) \in \{u_{x1}, \cdots, u_{xk_x};\}$ 因而由 $V_{u_x}^{\{u_{x1}, \cdots, u_{xk_x};\}}$ 的意义知 $< f(v_x), f(v_{xk_x}) > = < u_x, f(v_{xk_x}) > \in w$. 这就证明 $< v_x, v_y > \in E \leftrightarrow < f(v_x), f(v_y) > \in w$。

同理也可证明 $< f(v_x), f(v_y) > \in w \to < v_x, v_y > \in E$。

这样就证明了：如果图 G 和图 F 有相合的 VC 算法，那么它们就同构。

3 实例

例：判断图 1 中的两个图是否同构？

由 VC 算法

$\mathrm{VC}(G) = \{V_e^{\{a, c; b, d\}}, V_a^{\{b, d;\}}, V_c^{\{b, d;\}}\}$，

$\mathrm{VC}(F) = \{V_5^{\{2,4;1,3\}}, V_2^{\{1,3;\}}, V_4^{\{1,3;\}}\}$，

两图的 VC 算法相合，故知图 G 与图 F 同构。

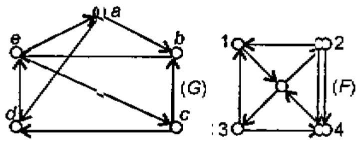


图 1

参考文献

1 罗示丰. 两图同构的判别准则及其复杂性. 计算机科学，1997，(10)：148～153.

2 罗示丰. 多重图的同构. 广西大学学报（自然科学版），1998，4：364～367.

（责任编辑：黎贞崇）