第 16 卷第 4 期,增刊 广西科学院学报 Vol. 16, No. 4 & Supplement
2000 年 11 月 Journal of Guangxi Academy of Sciences November 2000

［研究简报］

对角 Ramsey 数 $R(k,k)$ 的新下界*

New Lower Bounds for Diagonal Ramsey Numbers

罗海鹏 苏文龙** 黎贞崇
Luo Haipeng Su Wenlong Li Zhenchong

（广西科学院 南宁 530022）
（Guangxi Academy of Sciences, Nanning, 530022）

摘要 研究了自补图 G_p 的一些性质，提出新的算法，得到 3 个对角 Ramsey 数的新下界：$R(17,17) \geqslant 8\ 917$，$R(18,18) \geqslant 11\ 005$，$R(19,19) \geqslant 17\ 885$.

关键词 Ramsey 数 下界 自补图

中图法分类号 TP 312

Abstract The properties of self-complementary graphs were studied. A new algorithm was presented and three new lower bounds for diagonal Ramsey numbers were obtained: $R(17,17) \geqslant 8\ 917$, $R(18,18) \geqslant 11\ 005$, $R(19,19) \geqslant 17\ 885$.

Key words Ramsey number, lower bound, self-complementary graph

给定素数 $p = 4m + 1 \geqslant 5$，模 p 的平方剩余的集记为 A. 设图 G_p 的顶点集 $V = Z_p = \{-2m, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 2m\}$，边集 $E = \{\{x,y\}: x - y \in A\}$. 称 G_p 为自补图，其团数记为 $c(G_p)$.

1955 年 Greenwood 和 Gleason[1] 在确定 $R(3,3) = 6$ 与 $R(4,4) = 18$ 时首先构造了自补图 G_5 与 G_{17}，分别得到下界 $R(3,3) > 5$ 与 $R(4,4) > 17$. 沿着这个方向，Kalbfleisch[2]，Burling 与 Reyner[3]，Mathon[4] 和 Shearer[5] 借助于计算机把 $c(G_p)$ 的计算范围陆续扩展到 $p < 3\ 000$ 并证明了

引理 1[4,5] $c(G_p) = k \Rightarrow R(k+2, k+2) > 2p + 2$.

动态综述论文[6] 综合了他们的工作并记载着迄今最好的一些对角 Ramsey 数的下界：

$R(6,6) \geqslant 102$，$R(7,7) \geqslant 205$，$R(8,8) \geqslant 282$，$R(9,9) \geqslant 565$，$R(10,10) \geqslant 798$，$R(11,11) \geqslant 1\ 597$，$R(13,13) \geqslant 2\ 557$，$R(14,14) \geqslant 2\ 989$，$R(15,15) \geqslant 5\ 485$，$R(16,16) \geqslant 5\ 605$，以及 $R(12,12) \geqslant 1\ 597 + 11$.

此后十多年来，尚未见有文献报道 $c(G_p)$ 和 $R(k,k)$ 的新进展，这是因为计算 $c(G_p)$ 所遇到的运算量随着 p 的增大而呈指数型的增长，除非在理论和方法上有所创新，否则即使借助于

1999-08-11 收稿。
* 广西科学基金资助项目。
** 广西大学梧州分校，梧州，543002（Wuzhou Branch, Guangxi University, Wuzhou, 543002）。

速度更快的计算机也难获得太大的进展.

为此,我们研究 G_p 的性质,提出的算法具有较高效率从而获得新的成果,简单报道如下.

定理 1 令 $B=\{x\in A: x-1\in A\}$,用 $G[B]$ 表示 G_p 的由顶点集 B 生成的子图,其团数记为 $[B]$,则有 $c(G_p)=[B]+2$.

这表明了 G_p 是边可迁的;为了计算 G_p 的团数,可以计算简单得多的 $G[B]$ 的团数. 此外,我们还用 Legendre 符号计算得 B 中所含元素的个数为 $|B|=(p-5)/4$;用 G_p 的同构变换把 B 分拆成若干等价类,于是我们就阐明了 B 的大小及其结构性质. 在这些工作的基础上,我们提出计算 $[B]$ 从而得到 $c(G_p)$ 的新的算法.

算法 1

① 给定素数 $p=4m+1\geqslant 5$ 及其原根 g,计算 $|B|=(p-5)/4$. 如果 $|B|=0$,令 $[B]=0$,转到 ⑦;

② 作 $A=\{g^{2i}\in Z_p: 0\leqslant i\leqslant 2m-1\}$,$B=\{x\in A: x-1\in A\}$;

③ 作出 B 的所有等价类,并作出 B 中各等价类的代表元的集合 N;

④ 对于 $a\in N$,计算 $d(a)=|\{x\in B: x-a\in A\}|$,如果 $\max\{d(a): a\in N\}=0$,令 $[B]=1$,转到 ⑦;

⑤ 作全序集 $(B,\prec)$;

⑥ 对于 $a\in N$,在 $(B,\prec)$ 中计算 a 为起点的链的长度 $l(a)$,从而得到 $[B]=1+\max\{l(a): a\in N\}$;

⑦ 令 $k=c(Gp)=[B]+2$,得到结论 $R(k+1,k+1)\geqslant p+1$ 和 $R(k+2,k+2)\geqslant 2p+3$,运算结束;

根据这个算法,我们计算出 $3\,000<p=4m+1\leqslant 8\,941$ 范围内的所有 $c(G_p)$ 的值,得到 $c(G_{4457})=15$,$c(G_{5501})=16$,$c(G_{8941})=17$,并在 $8\,941<p<15\,000$ 范围内验证了 $c(G_p)\geqslant 18$,从而根据引理 1 得到新下界:

定理 2 $R(17,17)\geqslant 8\,917$,$R(18,18)\geqslant 11\,005$,$R(19,19)\geqslant 17\,885$.

参考文献

1 Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1955, (7): 1～7.

2 Kalbfleisch J G. Construction of special edge-chromatic graphs. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, 8: 575～584.

3 Burling J P, Reyner S W. Some lower bounds of the Ramsey numbers $n(k,k)$, Journal of Combinatorial Theory, 1972, 13 (B): 168～169.

4 Mathon R. Lower bounds for Ramsey numbers and association schemes. Journal of Combinatorial Theory, Serise B, 1987, 42: 122～127.

5 Shearer J B. Lower bounds for small diagonal Ramsey numbers. Journal of Combinatorial Theory, 1986, 42 (A): 302～304.

6 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994, DS1, Updated on 7/5, 1999: 1～35.

(责任编辑:黎贞崇)