

(研究简报)

### 3 个 Ramsey 数 $R(4, q)$ 的新下界\*

## New Lower Bounds of Three Ramsey Numbers $R(4, q)$

李 乔      苏文龙\*\*      罗海鹏\*\*\*  
Li Qiao      Su Wenlong      Luo Haipeng

(上海交通大学应用数学系 上海 200030)

(Dept. of Applied Math. Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030)

**摘要** 使用新的方法搜索 Ramsey 数  $R(4, q)$  的下界, 获得  $R(4, 20) \geq 234$ ,  $R(4, 22) \geq 314$ ,  $R(4, 25) \geq 458$ .

**关键词** Ramsey 数 下界 素数阶循环图

**中图法分类号** O 157.5; TP 312

**Abstract** A new method was used to search lower bounds of Ramsey numbers  $R(4, q)$ , and we obtained  $R(4, 20) \geq 234$ ,  $R(4, 22) \geq 314$ ,  $R(4, 25) \geq 458$ .

**Key words** Ramsey number, lower bound, circulant graph of prime order

### 1 Ramsey 数 $R(4, q)$ 的下界

Ramsey 数问题是组合数学中著名的难题. 关于 Ramsey 数  $R(4, q)$ , 1955 年 Greenwood 和 Gleason<sup>[1]</sup> 经过并不太难的运算就得到  $R(4, 3) = 9$ ,  $R(4, 4) = 18$ . 但此后的进展极其缓慢, 直到 1995 年 McKay 和 Radziszowski<sup>[2]</sup> 利用高速计算机耗费了大量的运算时间方才计算得  $R(4, 5) = 25$ . 鉴于 Ramsey 数的计算如此困难, 迄今尚未见到重大突破的迹象, 各国学者转而研究 Ramsey 数的界. 但要获得好的界也是非常困难的事情. 关于  $R(4, q)$  当  $q \geq 10$  的下界, 直到 1988 年以前仍是知之甚少. 1988 年 Bannani 在他的博士论文<sup>[3]</sup> 中给出一批结果:  $R(4, 10) \geq 72$ ,  $R(4, 11) \geq 77$ ,  $R(4, 12) \geq 86$ ,  $R(4, 13) \geq 97$ ,  $R(4, 14) \geq 103$ ,  $R(4, 16) \geq 120$ ,  $R(4, 17) \geq 128$ ,  $R(4, 18) \geq 135$ . 此后, 国际上关于 Ramsey 数研究的领头学者 Erdős 与他人合作<sup>[4]</sup> 于 1995 年获得  $R(4, 12) \geq 98$  和  $R(4, 15) \geq 128$  等结果. 1996 年 Piwakowski<sup>[5, 6]</sup> 借助于更先进的计算机刷新了这些记录, 他得到:  $R(4, 10) \geq 80$ ,  $R(4, 11) \geq 96$ ,  $R(4, 12) \geq 106$ ,  $R(4, 13) \geq 118$ ,  $R(4, 14) \geq 129$ ,  $R(4, 15) \geq 134$ .

2000-08-13 收稿。

\* 广西自然科学基金资助项目。

\*\* 广西大学梧州分校, 梧州, 543002 (Guangxi University, Wuzhou Branch, Wuzhou, 543002)。

\*\*\* 广西科学院, 南宁, 530022 (Guangxi Academy of Sciences, Nanning, 530022)。

## 2 我们的结果

近年来, 我们研究了素数阶循环图的一些性质并且获得了一些较强的结论, 例如我们在文献[7]中得到  $R(4, 12) \geq 128$ , 利用这个结论和一个简单的公式很容易得到推论  $R(4, 13) \geq 131$ ,  $R(4, 14) \geq 136$ ,  $R(4, 15) \geq 145$ , 超过了文献[3~6]的相应记录. 现在我们用四次剩余的方法进一步研究素数阶循环图的性质, 得到3个  $R(4, q)$  的新下界, 简介如下.

(1) 取素数  $p = 233$ , 参数集

$$S_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 19, 23, 29, 32, 37, 38, 46, 49, 51, 58, 63, 64, 71, 74, 76, 81, 85, 91, 92, 98, 102, 105, 107, 116\}.$$

按文献[7]的定义构造循环图  $G_p(S)$ , 我们在计算机上验证了:  $G_{233}(S_1)$  中既不含4点团  $K_4$ , 也不含20独立点集  $\bar{K}_{20}$ .

(2) 取素数  $p = 313$ , 参数集

$$S_2 = \{1, 3, 4, 9, 11, 12, 16, 19, 26, 27, 33, 36, 44, 48, 50, 57, 58, 64, 70, 76, 78, 79, 81, 83, 85, 98, 99, 103, 104, 108, 113, 119, 121, 132, 137, 139, 142, 144, 150\}.$$

我们在计算机上验证了:  $G_{313}(S_2)$  中既不含4点团  $K_4$ , 也不含22独立点集  $\bar{K}_{22}$ .

(3) 取素数  $p = 457$ , 参数集

$$S_3 = \{1, 4, 6, 7, 9, 16, 17, 19, 24, 28, 29, 36, 42, 49, 50, 54, 63, 64, 68, 73, 75, 76, 79, 81, 94, 96, 102, 107, 110, 112, 114, 116, 119, 130, 133, 134, 141, 144, 153, 155, 157, 163, 165, 168, 171, 174, 185, 195, 196, 200, 201, 203, 205, 215, 216, 218, 227\}.$$

我们在计算机上验证了:  $G_{457}(S_3)$  中既不含4点团  $K_4$ , 也不含25独立点集  $\bar{K}_{25}$ .

由上述我们有

**定理**  $R(4, 20) \geq 234, R(4, 22) \geq 314, R(4, 25) \geq 458$ .

这前两个结果超过了 Ramsey 数综述文献[8]所给出的目前最好的下界, 最后一个结果是本文首次报道的.

### 参考文献

- Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7: 1~7.
- McKay B D, Radziszowski S P.  $R(4, 5) = 25$ . Journal of Graph Theory, 1995, 19: 309~322.
- Bannani F. Bounds on classical Ramsey numbers [Ph D thesis]. Carleton University, Ottawa, November 1988.
- Calkin N J, Erdős P, Tovey C A. New Ramsey bounds from cyclic graphs of prime order. SIAM Journal of Discrete Mathematics, 1997, 10: 381~387.
- Piwakowski K. Applying tabu search to determine new Ramsey graphs. The Electronic Journal of Combinatorics, 1996, #R6, 3: 1~4.
- Piwakowski K. Applying algorithmic techniques in finding lower and upper bounds for Ramsey numbers (in Polish) [Ph D Thesis]. Technical University of Gdansk, ETI 5/96, 1996.
- 苏文龙, 罗海鹏, 李乔. 经典 Ramsey 数  $R(4, 12), R(5, 11)$  和  $R(5, 12)$  的新下界. 科学通报, 1997, 42(22): 2460.
- Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 2000, Updated on R7 #: 1~36.

(责任编辑: 黎贞崇)