第 18 卷第 3 期 广西科学院学报 Vol. 18, No. 3
2002 年 8 月 Journal of Guangxi Academy of Sciences August 2002

证券组合投资分析的最小二阶矩方法
A Method of Least Second Moment for Portfolio Selection

林孝贵
Lin Xiaogui

（广西工学院管理工程系 柳州 545006）
(Department of Management Engineering, Guangxi University of Technology, Liuzhou, 545006)

摘要 引入最小二阶矩方法来讨论和分析证券组合在当前价格的风险，得到证券组合的最小二阶矩模型，并导出风险和风险系数的计算公式，推论的结果与 Markowitz 的最小方差法的结果一致．分析结果表明，证券组合的最小二阶矩法比最小方差法更具优越性．
关键词 证券组合投资 最小二阶矩法 当前价格 风险 风险系数
中图法分类号 O212.1；F830.9
Abstract A least second moment method is used to analyze the current price risk for portfolio selection. The model, risk and formulae of risk coefficients are obtained. The results are in line with the Markowitz's least variance method. The analysis results show that the least second moment method is better than the least variance method in portfolio selection.
Key words portfolio selection, least second moment method, present price, risk, risk coefficient

在证券组合投资选择理论中，Markowitz[1,2]提出的均值——方差方法一直起主导作用．这一方法被广泛地接受作为证券组合优化的工具，并成为人们进行组合投资理论研究和实际应用的基础．它是以随机收益的均值作为投资者的收益，随机收益的方差作为投资者的风险来研究资产组合投资问题．但是，证券交易分买进和卖出 2 种情况，我们把买进一个证券组合（每一种证券都是买进）称为多头证券组合，卖出一个证券组合（每一种证券都是卖出）称为空头证券组合．投资者要判断当前价格是适合买进还是适合卖出，这就要度量在当前价格处买进的风险有多大，卖出的风险有多大，这样可以根据风险的大小作出判断，而均值——方差方法是用收益的方差来度量证券组合的风险，不便于分析证券组合在当前价格的风险．

2002-02-20 收稿。

因此，本文试图用最小二阶矩方法讨论这些问题，解出使总风险达最小的证券组合投资比例，得出多头证券组合风险和空头证券组合风险的新概念，并推导出这些风险的计算公式.

1 证券组合的最小二阶矩模型

设投资者选择了n种证券，这n种证券当前价格分别是$x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0}$，它们都是常数. 经过一段时间后，这$n$种证券的价格分别是$x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们都是随机变量. 记

$$\underset{n\times 1}{X_0}=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})',\ \underset{n\times 1}{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',$$

$$\underset{n\times 1}{\mu}=EX=(Ex_1,Ex_2,\cdots,Ex_n)',\ \underset{n\times n}{\Sigma}=\mathrm{Var}(X)=E(X-EX)(X-EX)',$$

$$\underset{n\times 1}{C}=\mu-X_0.$$

设第i种证券上的投资比例为$k_i,i=1,2,\cdots,n$. 记

$$\underset{n\times 1}{K}=(k_1,k_2,\cdots,k_n)',\ \underset{n\times 1}{\mathbb{1}}=(1,1,\cdots,1)'.$$

我们要求投资比例满足条件$k_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$，且$\sum_{i=1}^{n}k_i=1$，即$K\geqslant 0,\mathbb{1}'K=1$. 这$n$种证券相应于投资比例$K$进行投资就形成了一个证券组合投资，我们简称为证券组合. 这一证券组合在X_0处的市值是$\zeta_0=K'X_0$，它是一个常数，在X处的市值是$\zeta=K'X$，它是一个随机变量. 因为ζ是围绕着ζ_0随机波动的，所以投资者的风险来自ζ偏离ζ_0的程度. 因此我们用$\zeta-\zeta_0$的二阶矩$E(\zeta-\zeta_0)^2$来度量这种风险，而不用传统的方差$\mathrm{Var}(\zeta)$度量这种风险. 由于

$$\begin{aligned}E(\zeta-\zeta_0)^2&=E(\zeta-E\zeta+E\zeta-\zeta_0)^2=\mathrm{Var}(\zeta)+(E\zeta-\zeta_0)^2\\&=K'\Sigma K+K'CC'K=K'(\Sigma+CC')K.\end{aligned}\tag{1}$$

于是，求K使$E(\zeta-\zeta_0)^2$达最小的模型是

$$(\mathrm{M}_1)\quad \min z=K'(\Sigma+CC')K$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\mathbb{1}'K=1,\\K\geqslant 0.\end{cases}$$

模型(M_1)是用最小二阶矩方法得到的，我们称(M_1)是证券组合的最小二阶矩模型，称满足(M_1)的投资比例K_*为最小二阶矩投资比例. 下面我们用代数方法求解模型(M_1). 由于模型的约束条件构成凸集，因此目标函数可以在边界点上达到极值，去掉第二个约束条件$K\geqslant 0$不影响其结果. 设Σ可逆，则$\Sigma,\Sigma+CC'$都是正定矩阵，于是有[3]

1) 存在正定阵L，使$\Sigma+CC'=L^2$, (2)

2) $(\Sigma+CC')^{-1}=\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}CC'\Sigma^{-1}/(1+C'\Sigma^{-1}C)$, (3)

令$V=LK,A=\mathbb{1}'L^{-1}$，则模型(M_1)等价于以下模型

$$(\mathrm{M}_2)\quad \min V'V$$

$$\text{s.t. } AV=1.$$

由文献[3]，在方程$AV=1$的解V中，使$V'V$达到最小的解是$V_*=A^+$. 由$A=\mathbb{1}'L^{-1}$得A的加号逆为$A^+=L^{-1}\mathbb{1}/(\mathbb{1}'L^{-2}\mathbb{1})$. 于是把(2)式代入$A^+$得到模型$(M_1)$的解，即得到最小二阶矩投资比例为：

$$\begin{aligned}K_*&=L^{-1}V_*=L^{-1}A^+=L^{-2}\mathbb{1}/(\mathbb{1}'L^{-2}\mathbb{1})\\&=(\Sigma+CC')^{-1}\mathbb{1}/(\mathbb{1}'(\Sigma+CC')^{-1}\mathbb{1}),\end{aligned}\tag{4}$$

记$a_1=\mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1},a_2=\mathbb{1}'\Sigma^{-1}C,a_3=C'\Sigma^{-1}C,\Delta=a_1+a_1a_3-a_2^2$,

$\lambda_1 = (1 + a_3)/\Delta, \lambda_2 = a_2/\Delta$,

把(3)式代入(4)式整理得 K_* 的另一表达式为

$$K_* = \Sigma^{-1}(\lambda_1 \mathbb{1} - \lambda_2 C). \tag{5}$$

2 证券组合风险的最小二阶矩分析法

2.1 证券组合在当前价格处的风险

在上节中，用最小二阶矩方法得到投资比例 K_*，K_* 相应的证券组合在 X_0，X 处的市值仍记为 $\zeta_0 = K'_* X_0, \zeta = K'_* X$，证券组合在 X_0 处的风险 $E(\zeta - \zeta_0)^2$ 已包含了多头、空头 2 种情况的风险．当 $\zeta \geqslant \zeta_0$ 时，因为多头证券组合收益 $\zeta - \zeta_0 \geqslant 0$，所以此时多头证券组合没有风险；但是空头证券组合收益 $\zeta_0 - \zeta \leqslant 0$，所以此时空头证券组合就有风险．当 $\zeta < \zeta_0$ 时，因为多头证券组合收益 $\zeta - \zeta_0 < 0$，所以此时多头证券组合就存在风险；但是空头证券组合收益 $\zeta_0 - \zeta > 0$，所以此时空头证券组合没有风险．由此，我们有以下定义和定理．

定义 1　设 X_0, X 是上述 n 种证券的当前价格和经过一段时间后的价格，K_* 是最小二阶矩投资比例，$\zeta_0 = K'_* X_0, \zeta = K'_* X$，则

1) 称 $E(\zeta - \zeta_0)^2$ 为证券组合在 X_0 处的总风险，记为 $V(X_0)$；

2) 称 $E[(\zeta - \zeta_0)^2 | \zeta < \zeta_0] P(\zeta < \zeta_0)$ 为多头证券组合在 X_0 处的风险，记为 $V(X_0 | \zeta < \zeta_0)$；

3) 称 $E[(\zeta - \zeta_0)^2 | \zeta \geqslant \zeta_0] P(\zeta \geqslant \zeta_0)$ 为空头证券组合在 X_0 处的风险，记为 $V(X_0 | \zeta \geqslant \zeta_0)$.

定理 1　在定义 1 的假设和记号下有

1) $$V(X_0) = \mathrm{Var}(\zeta) + (E\zeta - \zeta_0)^2, \tag{6}$$

$$V(X_0) = V(X_0 | \zeta < \zeta_0) + V(X_0 | \zeta \geqslant \zeta_0), \tag{7}$$

2) $0 \leqslant V(X_0 | \zeta < \zeta_0) \leqslant V(X_0), 0 \leqslant V(X_0 | \zeta \geqslant \zeta_0) \leqslant V(X_0)$,

3) $$V(X_0) = 1/(\mathbb{1}'(\Sigma + CC')^{-1}\mathbb{1}), \tag{8}$$

$$V(X_0) = (1 + a_1)/\Delta. \tag{9}$$

证明　由(1)式和全数学期望公式得到结论 1)．由结论 1)得到结论 2)．把(4)式代入(1)式化简得到(8)式，把(3)式代入(8)式化简得到(9)式．证毕．

对 $\zeta = K'_* X$，记 $\mu_\zeta = E\zeta = K'_* \mu, \sigma_\zeta^2 = \mathrm{Var}(\zeta) = K'_* \Sigma K_*, l_1 = (\mu_\zeta - \zeta_0)/\sigma_\zeta, l_2 = (\zeta_0 - \mu_\zeta)/\sigma_\zeta = -l_1$．其中 $\mu_\zeta - \zeta_0 (\zeta_0 - \mu_\zeta)$ 是多(空)头证券组合在 X_0 处的期望收益，所以 $l_1 (l_2)$ 可以理解为在 X_0 处冒风险买进(卖出)证券组合所得到的每单位方差风险的收益．为了计算多头、空头证券组合的风险，我们在假设 $\zeta = K_* X \sim N(\mu_\zeta, \sigma_\zeta^2)$ 下进行讨论．

定理 2　在定义 1 的假设和记号下，如果 $\zeta \sim N(\mu_\zeta, \sigma_\zeta^2)$，则

1) $$V(X_0 | \zeta < \zeta_0) = V(X_0)\Phi(-l_1) - \sigma_\zeta^2 l_1 \exp(-l_1^2/2)/\sqrt{2\pi}, \tag{10}$$

2) $$V(X_0 | \zeta \geqslant \zeta_0) = V(X_0)\Phi(-l_2) - \sigma_\zeta^2 l_2 \exp(-l_2^2/2)/\sqrt{2\pi}, \tag{11}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数．

证明　结论 1) 和 2) 由以下 2 个积分运算得到

$$V(X_0 | \zeta < \zeta_0) = \int_{-\infty}^{\zeta_0} (t - \zeta_0)^2 p(t) \mathrm{d}t,$$

$$V(X_0 | \zeta \geqslant \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{+\infty} (t - \zeta_0)^2 p(t) \mathrm{d}t,$$

其中 $p(t)$ 是 $N(\mu_\zeta, \sigma_\zeta^2)$ 的概率密度函数．证毕．

从(10)式可以看出，在进行多头证券组合交易时，当前价格 $x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0}$ 越小，ζ_0 就越小，l_1 就越大，多头证券组合风险 $V(X_0|\zeta<\zeta_0)$ 就越小；从(11)式可以看出，在进行空头证券组合交易时，当前价格 $x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0}$ 越大，ζ_0 就越大，l_2 也就越大，空头证券组合的风险 $V(X_0|\zeta\geqslant\zeta_0)$ 就越小．

2.2 证券组合在当前价格处的风险系数

在进行多头、空头证券组合交易时，其风险越小，投资者就越有利．但定理1，定理2中给出的风险计算公式都是绝对数，我们可以采用相对数度量证券组合的风险程度，这样会更好地把握交易时机．

定义2 在定义1的假设和记号下

1) 称 $\rho_1=V(X_0|\zeta<\zeta_0)/V(X_0)$ 为多头证券组合在 X_0 处的风险系数；

2) 称 $\rho_2=V(X_0|\zeta\geqslant\zeta_0)/V(X_0)$ 为空头证券组合在 X_0 处的风险系数．

由定理1和定理2，风险系数有以下性质

定理3 设 ρ_1,ρ_2 分别是定义2中的多头、空头证券组合在 X_0 处的风险系数，则

1) $0\leqslant\rho_1\leqslant 1, 0\leqslant\rho_2\leqslant 1$；

2) $\rho_1+\rho_2=1$；

3) $\rho_1=1$ 或 $\rho_2=0$ 当且仅当 $V(X_0|\zeta<\zeta_0)=V(X_0)$；

4) $\rho_2=1$ 或 $\rho_1=0$ 当且仅当 $V(X_0|\zeta\geqslant\zeta_0)=V(X_0)$．

由定理3，ρ_1 度量了多头证券组合在 X_0 处的风险程度．当 ρ_1 越接近1，则多头证券组合风险就越大，当 ρ_1 越接近0，多头证券组合风险就越小；类似地，ρ_2 度量了空头证券组合在 X_0 处的风险程度，当 ρ_2 越接近1，则空头证券组合风险就越大，当 ρ_2 越接近0，空头证券组合风险就越小．

定理4 在定理2的假设和记号下

1) $\rho_1=\Phi(-l_1)-\dfrac{l_1}{(1+l_1^2)\sqrt{2\pi}}\exp(-l_1^2/2)$；

2) $\rho_2=\Phi(-l_2)-\dfrac{l_2}{(1+l_2^2)\sqrt{2\pi}}\exp(-l_2^2/2)$．

3 特殊结果

由于 $V(X_0)=E(\zeta-\zeta_0)^2$，所以当 $\zeta_0=E\zeta$ 时，即 $X_0=EX=\mu$，得到 $V(X_0)=\mathrm{Var}(\zeta)$，$C=\mu-X_0=0, l_1=l_2=0$，于是有

推论 在定理1的假设和记号下，再设 $X_0=EX=\mu$，则

1) 在 X_0 处的最小二阶矩投资比例为

$K_0=\Sigma^{-1}\mathbb{1}/\mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}$；

2) 相应于 K_0 的总风险为

$V(K_0)=\mathrm{Var}(\zeta)=1/\mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}$；

3) 设 $\zeta\sim N(\mu_\zeta,\sigma_\zeta^2)$，则有

$V(X_0|\zeta<\zeta_0)=V(X_0|\zeta\geqslant\zeta_0)=\dfrac{1}{2}V(X_0)$，

$\rho_1=\rho_2=\dfrac{1}{2}$．

(下转第134页)

2 莫竹承,梁士楚,范航清等.广西红树林造林技术的初步研究.见:范航清,梁士楚主编.中国红树林研究与管理.北京:科学出版社,1995.164～171.

3 范航清.广西海岸红树林现状及人为干扰.见:范航清,梁士楚主编.中国红树林研究与管理.北京:科学出版社,1995.189～202.

4 王文介,黄金森,毛树珍等.华南沿海和近海现代沉积.北京:科学出版社,1991.142～145.

5 Por F D. The ecosystem of the mangal:general consideration. In:Por F D,Dor I (eds). Hydrobiology of the Mangal. The Hague:Dr W Junk Pubishers,1984.1～14.

6 范航清,尹 毅,黄向东等.广西沙生红树植物—土壤相互作用及群落演替的研究.广西科学院学报,1993,9(2):1～7.

7 隋淑珍,张乔民.华南沿海红树林海岸沉积物特征分析.热带海洋,1999,(18)4:17～23.

8 范航清.广西海岸沙滩红树林的生态研究I:海岸沙丘移动及其对白骨壤的危害.广西科学,1996,3(1):44～48.

9 Augustinus PGEF. Geomorphology and sedimentology of mangroves. In:Perillo G M E(ed). Geomorphology and Sedimentology of Estuaries. Dvelopment in Sedimentology 53. Amsterdam:Elsevier Science,1995.333～357.

10 Wolanski E,Jones M,Bunt J S. Hydrodynamics of a tidal creek-mangrove swamp system. Australian Journal of *Marine and Freshwater Research*,*1980*,*31*:*431*～*450*.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第130页)

推论的结果与 Markowitz 的最小方差法的结果一致[4]。

4 结语

我们观察(6)式得到,用最小二阶矩方法得到在 X_0 处的证券组合总风险 $V(X_0)$ 可以分解成 2 项,第一项是 $\mathrm{Var}(\zeta)$,$\mathrm{Var}(\zeta)$ 是 $V(X_0)$ 的最小值,它是在 $X_0 = EX$,即 $\zeta_0 = E\zeta$ 时取得。第二项是 $(E\zeta - \zeta_0)^2$,它是由于 ζ_0 偏离 $E\zeta$ 所引起的。虽然 ζ_0 越接近 $E\zeta$,总风险 $V(X_0)$ 就越接近其最小值 $\mathrm{Var}(\zeta)$,但此时多头、空头证券组合风险越接近相等,使做空与做多的有利程度几乎一样,不便于判断当前价格 X_0 适合做多还是适合做空。虽然 ζ_0 偏离 $E\zeta$ 越远,总风险 $V(X_0)$ 就越大,但是,当 $\zeta_0 < E\zeta$ 时多头风险就越小,此时 X_0 就越有利于做多头证券组合交易;当 $\zeta_0 > E\zeta$ 时空头风险就越小,此时 X_0 就越有利于做空头证券组合交易。从以上分析可以看出,证券组合的最小二阶矩方法比最小方差法更具优越性。

参考文献

1 Markowitz H. Portfolio selection. Journal of Finance,1952,7:77～91.

2 Markowitz H. Portfolio Selection:Efficient Diversification of Invetments. New York:Wiley,1959.

3 张尧庭,方开泰.多元统计分析引论.北京:科学出版社,1982.17～42.

4 张尧庭.金融市场的统计分析.桂林:广西师范大学出版社,1998.38.

(责任编辑:黎贞崇)