

# 迭代线性最近点参数非均匀 B 样条曲线拟合 Curve Fitting of B-spline with Asymmetry Parameters at Iterative Liner Closest Point

黄文钧

Huang Wenjun

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁 530006)

(Dept. of Math. and Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Nanning, 530006)

**摘要** 提出迭代线性最近点参数非均匀 B 样条曲线拟合,该方法在求最近点这一步骤中作了新的探索,减少了计算量,提高了拟合速度.对该方法作了算法描述并在微机上将其实现.通过与其他同类算法相比较,表明该算法在数据点比较密集的情形高效快速.

**关键词** B 样条 曲线拟合 迭代

**中图分类号** TP391;O182

A

**Abstract** To reduce calculation and raise fitting speed, a method for curve fitting of B-spline with asymmetry parameters at iterative liner closest point is presented. The relevant algorithm is described and run successfully in the computer. Compared to other algorithms, this method is more efficient and quick in curve fitting in the situation of data denseness.

**Key words** B-spline, curve fitting, iteration

曲线拟合是从已测到的数据点集,通过某种方法求得一条最佳曲线.人们期望这条曲线能够通过上述数据点集中的所有点.然而在许多情况下,要获得这样的“理想曲线”是非常困难的.通常,测得的数据点集元素都比较多,而用 B 样条曲线拟合这个点集时,人们都希望其拟合曲线的控制顶点少一些,以便较容易控制该曲线.这样在拟合过程中就会得到方程个数多于未知数个数的所谓超限线性方程组,这种方程组一般无精确解,只能通过最小二乘法求得其近似<sup>[1]</sup>.

为了提高曲线对数据点的“逼近”精度,国内外有不少学者对此问题进行了研究,其中肖轶军等人提出了一种提高逼近精度方法,并且对其有效性、稳定性进行了讨论.然而对其计算量及速度没有考虑<sup>[2]</sup>.

本文提出迭代线性最近点参数的非均匀三次 B 样条曲线拟合.这个方法在保证迭代拟合的局部收敛的同时,计算量小,拟合速度快.

## 1 B样条曲线的最小二乘法反算拟合

### 1.1 一般反算拟合<sup>[1]</sup>

从给定的一系列型值点(也称数据点) $P_i(i=0,1,\dots,n-k)$ (其中 $k$ 是曲线次数,一般 $k=3$ ),反求 $k$ 次B样条曲线的控制顶点 $d_i(i=0,1,\dots,n-k+2)$ .在这种情形下,由 $n-k+1$ 个型值点只能确定 $n-k+1$ 个方程,而控制顶点,即方程组的未知数却有 $n-k+3$ 个,这时需补充两端点的“边界条件”,可得另外2个方程,和以上的 $n-k+1$ 个方程联立,即可解出唯一解集,这个解集就是B样条曲线的控制顶点集,由它生成的B样条曲线必经过型值点集 $P_i(i=0,1,2,\dots,n-k)$ .然而,在一般情况下,型值点的个数都比较庞大,而我们又不要很多的控制顶点.这样建立起来的方程组就会出现方程个数多于控制顶点的个数,这个方程组就是所谓的超限定方程组,只能用最小二乘法求解.

### 1.2 最小二乘法反算拟合<sup>[1]</sup>

从测得的数据点集 $p_i(i=0,1,\dots,n-k,n-k+1,n-k+2,\dots,m)$ 反求曲线的控制顶点 $(i=0,1,2,\dots,n-k+2)(n-k+2 < m)$ .首先对数据点集 $(i=0,1,2,\dots,m)$ 参数化(参数化方法有许多种,可视情况取其中一种),得参数集 $t_i(i=0,1,2,\dots,n+2)$ .于是得方程组

$$(P_i(t_i) = \sum_{j=0}^{n-k+2} d_j N_{j,k}(t_i), (i=0,1,2,\dots,n+2)).$$

$$P = Nd.$$

用最小二乘法解得 $d = \{d_i | i=0,1,3,\dots,n-k+2\}$ .这个解仅是近似解,由它生成的拟合曲线不能完全通过数据点集 $P_i(i=0,1,2,\dots,m)$ ,只是对该数据点集的逼近,而在均方误差最小的意义上是最优解,即对应的拟合曲线是最佳逼近.

### 1.3 最近点迭代拟合<sup>[2]</sup>

首先对所测得的数据点集参数化,建立一个线性方程组,通常是超限定方程组.用最小二乘法解出该方程组的近似解后,得出B样条曲线控制顶点集,然后在由该控制顶点集生成的B样条曲线上,寻找和数据点集对应最近距离点,再由这些最近距离点的参数值,对数据点集重新参数化,建立新的超定方程组并用最小二乘法求出新的控制点集.如此循环直至均方差达到预设的精度为止.

### 1.4 线性最近点

通常求某数据点 $p_i$ 的最近点,是把该点的参数 $t_{i \in [t_{i-\epsilon}, t_{i+\epsilon}]}$  $n$ 等分( $n > 1, \epsilon > 0$ ),每一等分点就是一个参数,对应一个曲线点.把这些曲线点逐个算出和 $p_i$ 的距离,最近者就是所谓的最近点.然而,在 $[t_{i-\epsilon}, t_{i+\epsilon}]$ 上, $p_i$ 的最近点不一定在 $n$ 等分点上,因而求得的所谓“最近点”只是 $n$ 个点中离 $p_i$ 最近的点,所以这个“最近点”实际上是“较近点”.

在数据点集比较密集的情况下,由于2个参数 $t_{i-\epsilon}$ 及 $t_{i+\epsilon}$ 对应的2个B样条曲线点 $C_1$ 及 $C_2$ 距离很近,可以看成直线段.所以在曲线段 $C_1C_2$ 上求出 $p_i$ 的最近点,就转化为在直线段 $C_1C_2$ 上求 $p_i$ 的最近点,求得的最近点就是所谓的线性最近点.显然,求线性最近点的计算量及速度都优于在曲线上求最近点.

## 2 定理

**定理1** 设平面上一点 $V$ 及一条线段 $AB$ .如图1所示,若在 $AB$ 上取一个分点序列(不一

定是等分点),构成一个有序点集  $\Omega = \{A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B\}$ ,相应地点  $V$  与点集  $\Omega$  中各点的连线也构成一个有序集合,记为:  $\pi = \{L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n\}$ . 其中  $L_0 = VA, L_n = VB, L_i = VP_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$ .

今在集合  $\pi$  中从第一个元素起顺序逐个考察,求出  $\pi$  中的最小值. 若有  $L_i \leq L_{i+1}, (i = 0, 1, \dots, n - 1)$ .

则  $L_i = \min\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n\}$ , (当  $i = n$  时, 令  $L_{i+1} = L_n$ ).

**证明**

(1) 设点  $V$  在线段  $AB$  上

1) 若点  $V$  在线段  $AB$  的延长线靠近端点  $A$  的一侧, 或者  $V = A$ , 见图 2.

这时, 显然  $\overline{VA} < \overline{VP_1}$  即  $l_0 < l_1$ , 但是,  $\overline{VP_1} < \overline{VP_2} < L < \overline{VB}$  即  $l_1 < l_2 < \dots < l_n$ ,

所以  $l_0 = \min\{l_0, l_1, \dots, l_n\} = \min \pi$ .

2) 若  $V \in (A, B)$ .

① 若  $V \in \Omega$ , 不妨设  $V = P_i$ , 这时显然有

$VP_i = 0$ , 即  $L_i = 0 < L_{i+1}$ , 且  $L_i = \min \pi$ .

② 若  $V \notin \Omega$ , 则点  $V$  把  $\Omega$  一分为二, 这两组的分点分在  $V$  的两侧, 设这两组中离点  $V$  最近的点分别为  $p_i, p_{i+1}$ , 注意到  $\overline{VA} > \overline{VP_1} > \dots > \overline{VP_i}; \overline{VP_{i+1}} < \overline{VP_{i+2}} < \dots < \overline{VB}$ . 即  $l_0 > l_1 > \dots > l_i$  及  $l_{i+1} < l_{i+2} < \dots < l_n$ . 若  $l_i \leq l_{i+1}$  显然有  $l_i = \min \pi$ . 若  $l_i > l_{i+1}$ , 这时注意到  $l_{i+1} < l_{i+2} (l_{i+2} < \dots < l_n)$  有  $l_{i+1} = \min \pi$ . 若仍然记  $i + 1$  为  $i$ , 则  $l_i = \min \pi$ .

3) 若点  $V = B$  或点  $V$  在  $AB$  延长线上靠近点  $B$  的一端. 显然  $l_n = L_n$  及  $L_n = VB = \min \pi$ .

(2) 若点  $V$  在直线  $AB$  之外, 这时设  $V$  在  $AB$  上的投影为  $v'$ .

1) 若  $v'$  在靠近点  $A$  一侧的延长线上或  $v' = A$ , 这时显然有  $\overline{v'A} < \overline{v'P_1}$  (即  $l_0 < l_1$ , 见图 3). 但是  $\overline{v'P_1} < \overline{v'P_2} < \dots < \overline{v'B}$ , (即  $l_1 < l_2 < \dots < l_n$ ), 所以当  $l_0 < l_1$  时  $l_0 = \min \pi$ .

2) 若  $v' \in (A, B)$ .

① 若  $v' \in \Omega$  记  $v' = p_i$ . 于是有  $\overline{v'P_i} < \overline{v'P_{i+1}}$ . 即  $l_i < l_{i+1}$ , 而实际上  $l_0 > l_1 > l_i; l_{i+1} < l_{i+2} < \dots < l_n$ . 于是  $l_i = \min \pi$ ;

② 若  $v' \notin \Omega$ , 这时  $v'$  把  $\Omega$  一分为二, 两组分在  $v'$  的两侧, 记这两组离  $v'$  最近的点分别为  $p_i, p_{i+1}$ .

注意到  $\overline{Av'} > \overline{P_1v'} > \dots > \overline{P_iv'}; \overline{P_{i+1}v'} < \overline{P_{i+2}v'} < \dots < \overline{Bv'}$ .

得  $l_0 > l_1 > \dots > l_i; l_{i+1} < l_{i+2} < \dots < l_n$ .

若  $l_i \leq l_{i+1}$  显然有  $l_i = \min \pi$ .

若  $l_i > l_{i+1}$ , 这时注意到  $l_{i+1} < l_{i+2} (l_{i+2} < \dots < l_n)$ , 于是有  $l_{i+1} = \min \pi$ . 如果仍然记  $i + 1$  为  $i$ , 则有  $l_i = \min \pi$ .

4) 若点  $v' = B$  或点  $v'$  在  $AB$  延长线的  $B$  端上, 显然  $l_n = L_n$ , 又因为  $\overline{Av'} > \overline{P_1v'} > \overline{P_2v'} > \dots > \overline{Bv'}$ , 即  $l_0 > l_1 > \dots > l_n$ , 也就是  $l_n = \min \pi$ .

综上所述, 定理得证.

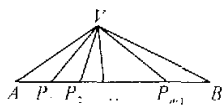


图 1 平面上一点  $V$  及直线段  $AB$

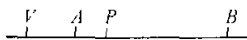


图 2 点  $V$  在  $AB$  延长线上  $A$  点一侧

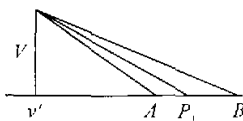


图 3 点  $V$  在线段  $AB$  之外

定理 2<sup>[2]</sup> 迭代最近点算法以均方距离为目标函数单调收敛于局部极小值。

由于最近点不易求得,我们提出一个与定理 2 相似的定理。

定理 2' 迭代较近点算法以均方距离为目标函数单调收敛于局部极小值。

我们这里仅证明定理 2', 而定理 2 的证明完全相同。

证明<sup>[1]</sup> 设第  $i$  次迭代得的曲线为  $C$ , 记  $C$  对于参数化  $T^i$  的点集为  $C(T^i)$ 。数据点集  $xyd[n][2]$  对应的较近点集为  $C(T^{i+1})$ 。若记数据点集  $xyd[n][2]$  与  $C(T^i)$  的均方差为  $\sigma_i$ , 与  $C(T^{i+1})$  的均方差为  $\sigma'_i$ 。显然有

$$\sigma'_i \leq \sigma_i, \quad (*)$$

另一方面,当我们用参数化  $T^{i+1}$  作第  $i+1$  次迭代后,得到的新曲线记为  $C^{i+1}$ , 而  $C^{i+1}$  对于参数化  $T^{i+1}$  的点集记为  $C^{i+1}(T^{i+1})$ , 数据点集  $xyd[n][2]$  与  $C^{i+1}(T^{i+1})$  的均方差记为  $\sigma_{i+1}$ , 于是由最小二乘法的意义,必有

$$\sigma_{i+1} \leq \sigma'_i, \quad (**)$$

结合 (\*) 式及 (\*\*) 式有  $\sigma_{i+1} \leq \sigma_i$ 。

定理证毕。

在实际操作中,定理 2' 比定理 2 可能更加有用,这是因为通常是将一小段曲线离散化成一个点集后,再从中找出与点集外的一点  $V$  距离最近的点。然而点  $V$  到该曲线的最近点不一定含在该小段曲线上,或者即使含在该小段曲线上,也不一定含在该小段曲线离散化后的点集中。故求得的最近点只能是“较近点”,然而有了定理作为保证,迭代较近点的过程是收敛的。只要迭代到一定的次数后,其结果可以达到预设的精度。

### 3 迭代线性最近点算法

(1) 开始:  $ii := 0$ ;

(2) 确定反求控制顶点的个数;

将数据点集  $xyd[n][2] = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  分成  $r$  组, 每组不少于 2 个元素。这样每组对应一段曲线, 而该组的首末 2 个元素对应该段曲线的 2 个端点。而  $r$  段曲线对应  $r-k$  个控制顶点 ( $k$  是 B 样条曲线的次数, 通常取  $k=3$ )。

(3) 对分好组的数据点集  $xyd[n][2]$  参数化。这一步要分 2 个小步:

1) 先对各段的首末端点统一参数化(全局参数);

2) 再对每一段中的各点参数化(全局参数)。

(4) 记参数化的参数集为  $T^0 = \{t_j^0; j = 0, 2, \dots, r+2k\}$ ;

(5) 将数据点集  $xyd[n][2]$  和  $T^0$  结合, 用待定系数法建立关于 B 样条基的线性方程组:

$$P_{n \times 2} = N_{n \times (r+k)} \cdot D_{(r+k) \times 2}$$

其中  $P_{n \times 2} = xyd[n][2]$ ,  $N$  是 B 样条基矩阵,  $D$  是控制顶点矩阵。该方程组一般是超限定方程组。

(6) 用最小二乘法解上述方程组, 求出其近似解集合  $d_0$ ;

(7) 用  $d_0$  与  $T^0 = \{t_j^0; j = 0, 2, \dots, r+2k\}$  结合计算出对应各参数值  $t_j^0$  的 B 样条曲线点集  $xy^0 = \{xy_j^0 | j = 1, 2, \dots, n\}$  并且计算数据点集  $xyd[n][2]$  与  $xy^0 = \{xy_j^0 | j = 1, 2, \dots, n\}$  的均方差  $\sigma_n$  (因为超限定方程组仅有近似解, 一般情况下  $\sigma_n \neq 0$ )。

(8) 在数据点集  $xyd[n][2]$  中, 依次逐点取出, 在由  $d_0$  与  $T^0 = \{t_j^0; j = 0, 2, \dots, r+2k\}$  确

定的 B 样条曲线  $C^0$  中找出与其距离“最近的点”，然后把所有的“最近点”的参数构成一个集合  $T^1 = \{t_j^1; j = 0, 2, \dots, r + 2k\}$ .

“最近点”，实际上是“较近点”。另一方面，对于点集  $xyd[n][2]$  中的某一点  $xyd[i][2]$ ，在参数化  $T^0 = \{t_j^0; j = 0, 2, \dots, r + 2k\}$  中对应的参数为  $t_{i+3}^0$ ，对应的曲线点为  $C^0(t_{i+3}^0)$ 。虽然点  $xyd[i][2]$  与点  $C^0(t_{i+3}^0)$  参数相同，可是不一定  $C^0(t_{i+3}^0)$  就是与  $xyd[i][2]$  距离最近的点。这是因为最小二乘法是对参数化  $T^0 = \{t_j^0; j = 0, 2, \dots, r + 2k\}$  而言，方差最小，并不保证参数相同的曲线点和数据点距离最小。换句话说，可以存在某一曲线点，其参数虽然和  $xyd[i][2]$  的参数不同，可是离  $xyd[i][2]$  更近。在这一步，是在参数区间  $[t_{i+3-\epsilon}^0, t_{i+3+\epsilon}^0]$  上，利用定理 1 加速求出  $xyd[i][2]$  在曲线段  $C^0(t_{i+3-\epsilon}^0)C^0(t_{i+3+\epsilon}^0)$  上的线性“最近点”。

(9)  $T^0 = T^1; i; = i + 1;$

(10) 考察  $|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < e$  是否成立，若成立，则结束。若不然， $i; = i + 1$ ；然后返回第 5 步继续执行，其中  $\sigma_n, \sigma_{n-1} (i - 1 \geq 0)$  是最后 2 个循环操作而得的方差， $e$  是预设的阈值。

### 4 计算量分析及比较

(1) 对于文献[2]算法，在区间  $[t_{i-\epsilon}, t_{i+\epsilon}]$  对应的曲线段上寻求某数据点  $xyd[i][2]$  的最近点时，需要对该区间上的每一参数计算对应的 B 样条曲线点。而对于每一曲线点的计算，需要调用一次 de boor 算法，对于三次 B 样条曲线而言，de Boor 算法<sup>[9]</sup> 要作 7 次除法，24 次乘法。

(2) 本文的算法在区间  $[t_{i-\epsilon}, t_{i+\epsilon}]$  对应的曲线段上寻求数据点的最近点时，计算每一参数值对应的线性插值曲线点仅用 2 次乘法。

(3) 对于一参数的计算，旧新 2 种算法的计算量相差如此之大，而在实际拟合计算中，需要对上千甚至上万个点作计算。在这种情形下，本文算法的快速优势更加明显地体现出来。

表1 迭代次数与最后两次迭代的均方差比较

$m$	$ \sigma_m - \sigma_{m-1} $
10	0.0202
20	0.0163
30	0.0153
40	0.0041
50	0.0004

其中  $m$  是迭代次数， $|\sigma_m - \sigma_{m-1}|$  是最后两次迭代的均方差之差的绝对值。

### 5 算法实现与分析

本文在 Matlab 上编程实现了提出的算法。

从表1中可看出，随着迭代次数的增大，曲线逼近趋于稳定。

图4是拟合结果图，其中，“.”组成的“曲线”是原始数据点集，而曲线是三次非均匀 B 样条拟合曲线。

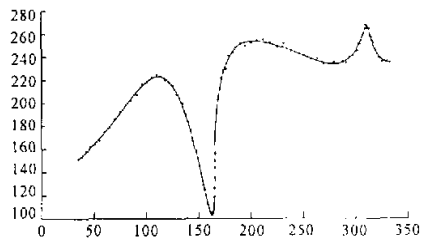


图4 三次非均匀 B 样条拟合曲线

### 6 结论

从以上分析可以看出，本文算法在数据点比较密集的情形是高效率的，快速的。为了更好地求得最佳逼近曲线，在工程中曲线拟合问题大多都是处理庞大的密集数据点集，本文算法为这类问题提供了一个快速的处理方法。

## 参考文献

- 1 施发中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994. 273.
- 2 肖轶军等. 基于迭代最近点的 B 样条曲线拟合方法研究. 中国图象图形学报, 2000, (7): 585~588.
- 3 Farin. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. Second Edition. Academic Press, 1990. 154.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第164页)

情, 怎样将 PKI 法制化、规范化, 建立具有中国特色的 PKI 是我们的当务之急。在公钥算法的选定上, 国外已经开始选用安全系数较高的椭圆曲线数字签名算法 ECDSA 进行数字签名, 而国内仍然处于选用 RSA 或 DSA 的状况。因此, 加强对 ECC 的研究, 在现有理论和技术基础上充分吸收国外先进经验, 开发自己的算法、标准、体系, 形成自主的创新的密码技术, 以对付来自国际社会的挑战。

## 参考文献

- 1 Housley R, Polk W, Ford W et al.. RFC 3280 Internet X 509 Public Key Infrastructure Certificate and Certificate Revocation List (CRL) Profile. <http://www.ietf.org/rfc/rfc3280.txt?number=3280>, 2002.
- 2 William J Caelli, Edward P Dawson, Scott A Rea PKI Elliptic curve cryptography and digital signatures. Computers & Security, 1999, 18: 47~66.
- 3 William M Doley. Digital Signature Standard (DSS). <http://csrc.nist.gov/cryptval/dss.htm>, 2002.
- 4 Hsu Chienlung, Wu Tzongsun, Wu Tzongchen. New nonrepudiable threshold proxy signature scheme with known signers. The Journal of Systems and Software, 2001, 58: 199~124.
- 5 Lee Narn-Yin, Hwang Tzonelih, Wang Chin-Hung. The security of two ID-based multisignature protocols for sequential and broadcasting architectures. Information Processing Letters, 1999, 70: 79~81.
- 6 Chang Yuhshihng, Wu Tzongchen, Huang Shinchuan. ELGamal-like digital signature and multisignature schemes using self-certified public keys. The Journal of Systems and Software, 2000, 50: 99~105.
- 7 Wu Tzongchen, Huang Chinchuan, Guan D J. Delegated multisignature scheme with document decomposition. The Journal of Systems and Software, 2001, (55): 321~328.

(责任编辑: 黎贞崇)