

# 一类被开发的 Kolmogorov 系统的定性分析 Qualitative Analysis of a Kind of Kolmogorov System Exploited

曾琬婷

Zeng Wanting

(广西师范大学数学与计算机科学学院 桂林 541004)

(Coll. of Math. and Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., Guilin, 541004)

**摘要** 讨论一类食饵种群被开发的捕食系统平衡点的行为和系统的稳定性. 应用向量场分析和解有界但闭轨不存性, 讨论了平衡点全局稳定的条件; 应用 Dulac 函数法得到闭轨不存在的充分条件; 应用 Poincare-Bendixson 环域定理及张芷芬惟一性定理证明了极限环的存在惟一性.

**关键词** 捕食-食饵系统 极限环 闭轨

**中图分类号** O175

**Abstract** The behavior of equilibria and stability of a kind of predator-prey system in which the prey is exploited is discussed. Constructing by Dulac function, a sufficient condition of the closed orbit is obtained. The condition of global stability of equilibria is discussed by the analysis of vector field and the boundness of solution and nonexistence of close orbit. The existence and uniqueness of limit cycle is obtained in terms of Poincare-Bendixson theorem and Zhang Zhifen uniqueness theorem.

**Key words** predator-prey system, limit cycle, close orbit

## 1 一类被开发的 Kolmogorov 系统

由于 Kolmogorov 模型的实际生态学意义, 它引起了许多工作者的关注, 特别是如下一类 Kolmogorov 模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_0 + a_1x - a_2x^2 - a_3g(y)), \\ \frac{dy}{dt} = y(bx - d). \end{cases} \quad (1.1)$$

文献[1~4]对系统(1.1)在定性行为方面作了较深入的研究, 然而对被开发的这一类

Kolmogorov 模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_0 + a_1x - a_2x^2 - a_3g(y)) + k, \\ \frac{dy}{dt} = y(bx^n - d) + h, \end{cases} \quad (1.2)$$

却几乎没有讨论过,其中 $h, k$ 为常数,当 $h, k$ 为正数时表示对2个种群的投放;当 $h, k$ 为负数时表示对2个种群的收获(捕捞)<sup>[5]</sup>.直到文献[6]才对 $g(y) = y^3, h = 0, n = 1, k > 0$ 的情形在这方面作了较全面的讨论,本文主要是在文献[6]的基础上作进一步的推广与深入研究,把 $y^3$ 推广到一般的函数 $g(y)$ ,讨论 $g(y)$ 在满足一定的条件时系统的定性行为,即讨论如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_0 + a_1x - a_2x^2 - a_3g(y)) + k, \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $a_0 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, k > 0, a_1$ 不定号.根据生态学意义<sup>[7]</sup>, $x, y$ 为食饵种群和捕食种群的密度, $a_0$ 为食饵种群的内禀增长率, $a_1x - a_2x^2$ 为密度制约项, $-a_3g(y)$ 为捕食率, $k$ 为人类对食饵种群的投放;其中 $x, y$ 在区域 $\Omega = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 中变动,故本文讨论只在 $\Omega$ 和 $\Omega' = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ 上进行.本文始终假设 $g(y), g'(y)$ 在 $[0, +\infty)$ 内严格递增,且 $g(0) = 0, g'(0) = 0, \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{y} = +\infty$ .

## 2 主要结论

为了方便讨论,对(1.3)作变换: $\bar{x} = x, \bar{y} = y, \bar{t} = a_3t$ ,变换后仍用 $x, y, t$ 记之,则系统(1.3)变成与之等价的系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(b_0 + b_1x - b_2x^2 - g(y)) + c \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = b_3y(x - 1) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $b_0 = a_0/a_3 > 0, b_2 = a_2/a_3 > 0, b_3 = 1/a_3 > 0, c = k/a_3 > 0; b_1 = a_1/a_3$ 不定号.

### 2.1 平衡点的性态分析

令 $N(x) = b_0x + b_1x^2 - b_2x^3 + c$ ,由方程根与系数的关系知 $N(x) = 0$ 只有一个正根,记为 $x^*$ .

**引理 1** (1)当 $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c \leq 0$ 时,系统(2.1)在 $\Omega$ 上有惟一的平衡点 $R_1(x^*, 0)$ .

(2)当 $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$ 时,系统(2.1)在 $\Omega$ 上有2个平衡点 $R_1(x^*, 0), R_2(1, y^*)$ ,其中 $y^*$ 为方程 $g(y) = b_0 + b_1 - b_2 + c$ 的惟一解.

**引理 2** (1)当 $x^* > 1$ 时,平衡点 $R_1(x^*, 0)$ 为鞍点.

(2)当 $0 < x^* < 1$ 时,平衡点 $R_1(x^*, 0)$ 为稳定的焦(结)点.

(3)当 $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$ 时,若 $b_1 - 2b_2 - c < 0$ ,则 $R_2(1, y^*)$ 为稳定的焦(结)点;若 $b_1 - 2b_2 - c > 0$ ,则 $R_2(1, y^*)$ 为不稳定的焦(结)点.

**证明** 由系统(2.1)的变分矩阵易证.

**引理 3** (1)若 $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$ ,则 $x^* > 1$ ,平衡点 $R_1(x^*, 0)$ 为鞍点.

(2) 若  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c < 0$ , 则  $0 < x^* < 1$ , 平衡点  $R_1(x^*, 0)$  为稳定的焦(结)点.

**证明** 因  $\lim_{x \rightarrow 0^+} N(x) = c, \lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = -\infty$ , 而方程  $N(x) = 0$  只有一个正根  $x^*$ , 再由引理 2 知引理 3 成立.

**2.2 平衡点的全局稳定性**

在区域  $\Omega^+$  内, 由系统(2.1)中  $P(x, y)$  与  $Q(x, y)$  的符号最多可将  $\Omega^+$  分成 4 个区域  $\Omega_1 = \{(x, y) | P > 0, Q > 0\}, \Omega_2 = \{(x, y) | P > 0, Q < 0\}, \Omega_3 = \{(x, y) | P < 0, Q > 0\}, \Omega_4 = \{(x, y) | P < 0, Q < 0\}$ .

**定理 1** 当  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c < 0$  时, 系统(2.1)的平衡点  $R_1(x^*, 0)$  在  $\Omega$  上全局渐进稳定.

**证明** 由引理 1、引理 3 知此时系统(2.1)在  $\Omega$  上有唯一的平衡点  $R_1(x^*, 0)$ , 且  $0 < x^* < 1$ , 平衡点  $R_1(x^*, 0)$  为稳定的焦(结)点. 又由  $g(y)$  严格递增, 且  $g(0) = 0$ , 不妨设曲线  $P(x, y) = 0$  的大致图像如图 1 所示, 且易知区域  $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  的位置也如图 1 所示. 下证系统(2.1)在区域  $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  中的向量场如图 1 所示. 如果轨线  $(x(t), y(t))$  始点在  $\Omega_2, \Omega_4$  中, 则轨线或者趋于平衡点  $R_1(x^*, 0)$  或者与曲线  $P(x, y) = 0$  相交, 由于在曲线  $P(x, y) = 0$  上没有其它的平衡点, 再由轨线的斜率可知与曲线  $P(x, y) = 0$  相交的轨线当  $t \rightarrow +\infty$  时, 最终仍趋于  $R_1(x^*, 0)$ ; 从区域  $\Omega_3$  中出发的轨线必与直线  $x = 1$  相交, 这是因为在  $\Omega_3$  中随着的  $t$  增大,  $y$  增大,  $x$  减少, 而

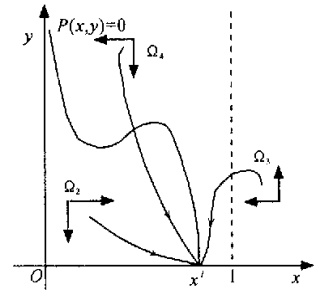


图 1 向量场

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \left| \frac{b_3 y(x-1)}{x(b_0 + b_1 x - b_2 x^2 - g(y)) + c} \right| = \left| \frac{b_3(1 - \frac{1}{x})}{\frac{g(y)}{y} - \frac{b_0 + b_1 x - b_2 x^2 + c}{xy}} \right|,$$

由于  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{y} = +\infty$ , 于是必存在常数  $M > 0$ , 使当  $y$  适当大时有  $\left| \frac{dy}{dx} \right| < M$ , 所以轨线不可能永远停留在直线  $x = 1$  的右边, 又因为  $y = 0$  是积分曲线且当  $x > 0$  时, 在  $y = 0$  上除  $R_1(x^*, 0)$  外无其它平衡点, 故从区域  $\Omega_3$  中出发的轨线必与  $x = 1$  相交进入区域  $\Omega_4$ , 最终趋于  $R_1(x^*, 0)$ ; 如果轨线始在  $y$  轴上, 由系统(2.1)的方向场可看出轨线必进入区域  $\Omega_2$ , 最终趋于  $R_1(x^*, 0)$ .

综合以上所述, 定理 1 得证.

定理 1 的生态学意义是: 当  $N(1) < 0$  时, 捕食种群最终灭绝, 食饵种群稳定在  $x^*$  水平上.

**定理 2** 当  $c > \frac{b_1^3}{27b_2^2}$  时, 系统(2.1)在  $\Omega^+$  上不存在闭轨.

**证明** 取 Dulac 函数:  $B(x, y) = x^{-1}y^{-1}$  则

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BP)}{\partial y} = B(b_0 + 2b_1 x - 3b_2 x^2 - g(y)) - x^{-2}y^{-1}P(x, y) + Bb_3(x-1) - x^{-1}y^{-2}Q(x, y) = B(b_1 x - 2b_2 x^2 - \frac{c}{x}),$$

显然, 当  $b_1 \leq 0$  时, 在  $\Omega^+$  上有  $[\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BP)}{\partial y}]|_{(2.1)}$

$< 0$ ; 对  $b_1 > 0$  时, 令  $\Phi(x) = b_1x^2 - 2b_2x^3 - c$ , 易得  $\Phi(x)$  在  $x = \frac{b_1}{3b_2}$  取到最大值, 所以当  $\Phi(\frac{b_1}{3b_2}) = b_1(\frac{b_1}{3b_2})^2 - 2b_2(\frac{b_1}{3b_2})^3 - c < 0$  时, 即当  $c > \frac{b_1^3}{27b_2^2}$  时, 有  $\Phi(x) < 0$ , 从而  $\frac{\Phi(x)}{x} = b_1x - 2b_2x^2 - \frac{c}{x} < 0$  (因  $x > 0$ ), 故当  $c > \frac{b_1^3}{27b_2^2}$  时, 在  $\Omega^+$  上有  $[\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BP)}{\partial y}]|_{(x,y)} < 0$ . 又  $b_1 \leq 0$  时必有  $c > \frac{b_1^3}{27b_2^2}$ , 因此由 Dulac 定理知定理 2 得证.

**定理 3** 当  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$  时, 系统(2.1)从  $\Omega^+$  出发的一切解有界.

**证明** 只须证明对系统(2.1)从  $\Omega^+$  出发的任一解总可以构造一个包含初始点  $(x_0, y_0)$  的区域, 使得系统的轨线穿过时都是由外向内, 且区域之外不存在平衡点. 当  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$  时, 由引理知  $x^* > 1$ , 且系统(2.1)在  $\Omega^+$  有惟一平衡点  $R_2(1, y^*)$ . 构造区域如图 2 所示, 其中  $x_A \geq \max\{x^*, x_0\}$ ,  $AB$  为直线  $x = x_A$  的一段;  $BC$  为直线  $y + x = k$  的一段;  $DC$  为直线  $y = k - 1, x \in [0, 1)$  的一段;  $C$  为直线  $BC$  与  $x = 1$  的交点; 当  $k$  取适当大时, 可得区域  $OABCDO$  就为所要求的区域. 因为: 在线段  $AB$  上, 记  $L_1 \equiv x - x_A = 0$  则有

$$\frac{dL_1}{dt}|_{L_1=0} = \frac{dx}{dt}|_{L_1=0} = b_0x_A + b_1x_A^2 - b_2x_A^3 + c - x_Ag(y) = N(x_A) - x_Ag(y),$$

而由前面对函数  $N(x)$  的分析知  $N(x_A) \leq N(x^*) = 0$ , 所以有  $\frac{dL_1}{dt}|_{L_1=0} < 0$ , 故  $L_1 = 0$  为无切线段, 轨线均从  $L_1 = 0$  的右侧穿向左侧.

在线段  $BC$  上, 记  $L_2 \equiv y + x - k = 0$ , 则

$$\frac{dL_2}{dt}|_{L_2=0} = (\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt})|_{L_2=0} = [b_3y(x-1) + x(b_0 + b_1x - b_2x^2 - g(y)) + c]|_{L_2=0} = x[b_3(k-x) - g(k-x)] - b_3k + x(b_3 + b_0 + b_1x - b_2x^2) + c.$$

由假设  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{g(y)}{y} = +\infty$ , 则对  $M = b_3 > 0$ , 存在  $X > 0$ , 使当  $k - x > X$  即  $k > x + X$  时, 有  $\left| \frac{g(k-x)}{k-x} \right| > b_3$ , 即  $k > x + X$  时有  $g(k-x) > b_3(k-x)$ . 记  $H = \max_{1 \leq x \leq x_A} \{x(b_0 + b_3 + b_1x - b_2x^2)\}$ , 故只要选取  $k = \max\{x_A + X, \frac{H+c}{b_3}, 1 + y_0, 1 + y^*\}$ , 便有  $\frac{dL_2}{dt}|_{L_2=0} < 0$ , 故  $L_2 = 0$  为无切线段, 轨线均从  $L_2 = 0$  的上方穿向下方.

在线段  $DC$  上, 记  $L_3 \equiv y - k + 1 = 0$ , 则  $\frac{dL_3}{dt}|_{L_3=0} =$

$$\frac{dy}{dx}|_{L_3=0} = b_3(k-1)(x-1) < 0 \text{ (因 } x \in [0, 1)), \text{ 故 } L_3 =$$

$0$  为无切线段, 轨线均从  $L_3 = 0$  的上方穿向下方.

在线段  $OD$  上, 记  $L_4 \equiv x \equiv 0$ , 则  $\frac{dL_4}{dt}|_{L_4=0} = \frac{dx}{dt}|_{L_4=0} =$

$$0 = [x(b_0 + b_1x - b_2x^2 - g(y)) + c]|_{L_4=0} = c > 0.$$

故  $L_4 = 0$  为无切线段, 轨线均从  $L_4 = 0$  的左侧穿向右侧.

又  $OA$  为系统(2.1)的积分直线, 所以区域  $OABCDO$

为所求的区域, 系统(2.1)的轨线穿过该区域的方向如图 2 所示. 又因此区域之外无其它平衡点, 故从  $\Omega^+$  出发的一切解有界.

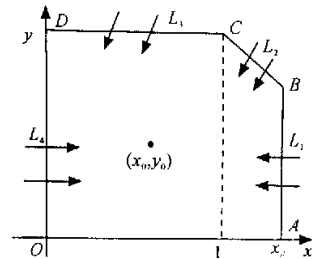


图 2 区域方向

**定理 4** 当  $c > \max\{b_2 - b_1 - b_0, b_1 - 2b_2, \frac{b_1^3}{27b_2^2}\}$  时, 系统(2.1)的平衡点  $R_2(1, y^*)$  在  $\Omega^+$  内全局稳定.

**证明** 由引理 2 知当  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$ , 且  $b_1 - 2b_2 - c < 0$  时,  $R_2(1, y^*)$  为稳定的焦(结)点, 又由定理 2, 当  $c > \frac{b_1^3}{27b_2^2}$  时, 系统(2.1)在  $\Omega^+$  上不存在闭轨, 再由定理 3 得从  $\Omega^+$  出发的一切解有界, 故定理 4 得证.

定理 4 的生态学意义是: 当  $c > \max\{b_2 - b_1 - b_0, b_1 - 2b_2, \frac{b_1^3}{27b_2^2}\}$  时, 食饵种群与捕食种群最终长期共存, 稳定在  $R_2(1, y^*)$  上.

**2.3 极限环的存在惟一性**

**定理 5** 如果  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$ , 且  $b_1 - 2b_2 - c > 0$ , 则系统(2.1)在平衡点  $R_2(1, y^*)$  外围至少存在一个稳定的极限环.

**证明** 当  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 + c > 0$ , 且  $b_1 - 2b_2 - c > 0$  时, 由引理知系统(2.1)在  $\Omega^+$  有惟一平衡点  $R_2(1, y^*)$ , 且  $R_2(1, y^*)$  为不稳定的焦(结)点. 因此可构造一区域使系统(2.1)的所有与区域边界相交的轨线都在  $t$  增加时从区域的外部进入内部或者停留在边界上, 而区域内不含有奇点. 区域的外边界可用类似于定理 3 的办法构造, 如图 3, 又由于  $R_2(1, y^*)$  为不稳定的焦(结)点, 故其内边界构造的可能性是显然的, 所以由 Poincare-Bendixson 区域定理<sup>[5]</sup>知在平衡点  $R_2(1, y^*)$  外围至少存在一个稳定的极限环.

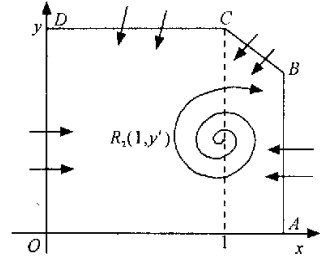


图 3 区域外边界构造

**定理 6** 当  $N(1) = b_0 + b_1 - b_2 - c > 0$ , 且  $b_1 - 2b_2 - c > 0$  时, 系统(2.1)在平衡点  $R_2(1, y^*)$  外围存在惟一稳定的极限环.

**证明** 对系统(2.1)作变换:  $x = 1 + u, y = y^* e^v, dt = (1 + u)dt$ , 则(2.1)变为与之等价的系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -b_2 u^2 + (b_1 - 2b_2)u - \frac{cu}{1+u} + g(y^*) - g(y^* e^v), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{b_3 u}{1+u}. \end{cases} \quad (2.2)$$

令  $F(u) = b_2 u^2 - (b_1 - 2b_2)u + \frac{cu}{1+u}, \varphi(v) = g(y^* e^v) - g(y^*), h(u) = \frac{b_3 u}{1+u}$ , 则系统(2.2)变为广义的 Liénard 方程:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -F(u) - \varphi(v), \\ \frac{dv}{dt} = h(u), \end{cases} \quad (2.3)$$

因为  $uh(u) = \frac{b_3 u^2}{1+u} > 0, H(u) = \int_0^u h(s)ds = b_3 u - b_3 \ln(1+u)$ , 显然  $H(u)$  在  $u > -1$  的任何有限区间内满足 Lipschitz 条件, 且  $H(-1+0) = H(+\infty) = +\infty$ , 又因为  $\varphi(+\infty) = +\infty, \varphi(-\infty) = -g(y^*) < 0, \varphi(0) = 0, \phi(v) = y^* e^v g'(y^* e^v) > 0$ , 且  $v \neq 0$  时,  $v\varphi(v) =$

$v[g(y^*e^v) - g(y^*)] > 0, F(0) = 0$ , 记  $f(u) = F'(u) = 2b_2 - (b_1 - 2b_2) + \frac{c}{(1+u)^2}$ , 则  $f(u)$  在  $u > -1$  上连续且  $f(0) = -(b_1 - 2b_2 - c) < 0$ ;

$$\left(\frac{f(u)}{h(u)}\right)' = b_3^{-1}u^{-1}(1+u)^2[2b_2u^2(1+u)^2 + (b_1 - 2b_2)u^2 + 2(b_1 - 2b_2 - c)u + b_1 - 2b_2 - c],$$

令  $G(u) = (b_1 - 2b_2)u^2 + 2(b_1 - 2b_2 - c)u + b_1 - 2b_2 - c$ , 因为

$$\Delta = 4(b_1 - 2b_2 - c)^2 - 4(b_1 - 2b_2)(b_1 - 2b_2 - c) = -4c(b_1 - 2b_2 - c) < 0,$$

所以对一切  $u$  有  $G(u) > 0$ , 从而  $\left(\frac{f(u)}{h(u)}\right)' > 0$ , 于是由张芷芬惟一性定理<sup>[9]</sup>及定理 5 知定理 6 成立.

定理 6 的生态学意义是: 在定理 6 的条件下, 食饵种群与捕食种群最终会发生周期性振荡, 达到相对的稳定.

### 参考文献

- 1 陈兰荪, 井竹君. 捕食-食饵相互作用中微分方程的极限存在性与惟一性. 科学通报, 1984, 29(6): 521~523.
- 2 张江山. 一类三次 Kolmogorov 系统的极限环的存在性与惟一性. 生物数学学报, 1989, 4(1): 91~95.
- 3 李万同. 一类  $n$  次 Kolmogorov 系统的极限环. 应用数学, 1992, 5(2): 13~17.
- 4 李万同. 一类 Kolmogorov 捕食系统的极限环. 纯数学与应用数学, 1995, 11(2): 64~68.
- 5 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究. 合肥: 安徽教育出版社, 1996. 337.
- 6 韦煜明. 一类食饵种群具有投放率的捕食系统的定性分析. 广西科学, 2003, (1): 11~14.
- 7 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法. 北京: 科学出版社, 1988.
- 8 张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题. 北京: 北京大学出版社, 1987.
- 9 张芷芬, 丁同仁等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985.

(责任编辑: 黎贞崇)



## 人类有能力战胜传染性非典型肺炎

人类自古就与疾病进行斗争, 从而形成了医学. 疾病的发生与流行是经常出现的. 据历史记载, 世界性鼠疫(Plague)大流行有 3 次, 首次发生于 6 世纪东罗马帝国狄斯丁王朝. 医学史上称“游西第安娜瘟疫”, 在许多国家持续流行 50 余年, 死亡近亿人; 第二次发生于 14 世纪, 称“黑死病”, 波及整个欧、亚两洲及非洲北海岸, 欧洲死亡 2500 万人, 几乎占当时欧洲总人口的 1/4, 东方各国死亡 1300 万人; 第三次发生于 19 世纪初, 波及 32 个国家. 18 世纪, 天花(Smallpox)曾给人类带来了严重的灾难, 数百万人致残、致死, 仅欧洲就死亡 50 万人, 亚洲高达 80 万人. 18、19 世纪, 流行性感胃(influenza)(简称流感)曾发生过 7 次世界大流行, 其中 1918 年的大流行中, 有 2000 万人死亡. 自 20 世纪 70 年代以来, 相继发生了 30 多种新的传染病, 其中不少以爆发流行的面貌出现. 有的病原体原来在动物间相互传播与流行, 由于某种原因转移了它们攻击的目标, 开始感染人类. 例如, 科学家在考证艾滋病起源时发现, 艾滋病很可能起源于非洲丛林地区生活着的一种长尾猿猴. 即使在科技发达的今天, 人类仍然面临各种传染病的威胁, 如霍乱、疟疾、结核病和艾滋病等. 2002 年全世界就有 900 万人感染肺结核, 死亡 200 多万人. 截止 2003 年 5 月 17 日 WHO 报告, 非典型肺炎(Severe Acute Respiratory Syndrome, 简称“SARS”)全世界 600 余人死亡, 病死率为 6%~10%. (下转第 59 页)