第 19 卷第 4 期　　广西科学院学报　　Vol. 19, No. 4
2003 年 11 月　　Journal of Guangxi Academy of Sciences　　November 2003

基于并行算法的 Ramsey 数 $R(3,q)$ 的 2 个新下界*

Two New Lower Bounds for Ramsey Numbers $R(3,q)$ Based on the Parallel Algorithm

罗海鹏[1]　　苏文龙[2]　　吴 康[3]　　黎贞崇[1]
Luo Haipeng　Su Wenlong　Wu Kang　Li Zhenchong

(1. 广西科学院　南宁　530022; 2. 广西大学梧州分校　梧州　543002;
3. 华南师范大学数学系　广州　510631)
(1. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, 530022;
2. Wuzhou Branch of Guangxi University, Wuzhou, 543002;
3. Math. Dept., South China Normal University, Guangzhou, 510631)

摘要　用并行算法寻求有效的参数集，构造素数阶循环图，得到二色 Ramsey 数 $R(3,q)$ 的 2 个新下界：$R(3,24)\geqslant 140$，$R(3,25)\geqslant 143$.

关键词　Ramsey 数　下界　素数阶循环图　并行算法

中图法分类号　O157.5; TP312

Abstract　Use parallel algorithm to find effective parameter sets, and construct prime-order circulant graphs. Two new lower bounds for 2-color Ramsey numbers $R(3,q)$ are obtained. They are: $R(3,24)\geqslant 140$, $R(3,25)\geqslant 143$.

Key words　Ramsey number, lower bound, prime-order circulant graph, parallel algorithm

1　Ramsey 数 $R(3,q)$ 的已知结果和本文的 2 个新下界

经典 Ramsey 数的计算是组合数学中非常困难的问题. 据动态综述论文[1]的记录，迄今已知的二色 Ramsey 数 $R(3,q)$ 的准确值和下界如表 1 和表 2 所示。

表 1　$R(3,q)$ 的准确值

q	3	4	5	6	7	8	9
准确值	6	9	14	18	23	28	36

表 2　$R(3,q)$ 的下界

q	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
下界	40	46	52	59	66	73	79	92	98	106	109	122	125	136

本文在文献[2～14]的基础上，用并行算法寻求有效的参数集，构造素数阶循

2003-08-03 收稿。
* 国家自然科学基金(10161003)，广西自然科学基金(桂科回 0342002)资助项目。

环图,得到2个首次报道的新下界:

定理1 $R(3,24)\geqslant 140, R(3,25)\geqslant 143$.

2 素数阶循环图与参数集

给定素数 $p=2m+1$,记 $Z_p=\{-m,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,m\}=[-m,m]$(对于整数 $s<t$,记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$).以下除非另有说明,所有整数及其运算结果都理解为模 p 后属于 Z_p,并用通常的等号"="表示"模 p 相等".

定义1 对于集合 $S=[1,m]$ 的一个2部分拆 $S=S_1\cup S_2$,设 p 阶完全图 K_p 的顶点集 $V=Z_p$,边集 E 是 Z_p 的所有2元子集的集且有分拆 $E=E_1\cup E_2$,其中

$$E_i=\{\{x,y\}\in E:|x-y|\in S_i\}, i=1,2.$$

把 E_i 中的边叫做 S_i 色的,称 K_p 中 S_i 色边所导出的子图 $G_p(S_i)=(Z_p,E_i)$ 为关于参数集是 S_i 的 p 阶循环图,其团数记为 $[G_p(S_i)]$,这里 $i=1,2$.

于是我们用参数集 S_i 按照定义1把 K_p 的边2-染色.据Ramsey定理,显然有

定理2 设 $c_i=[G_p(S_i)], i=1,2$.则 $R(c_1+1,c_2+1)\geqslant p+1$.

定义2 称 $n=|S_1|$ 为参数集 S_1 的度数.设 g 是 p 的一个原根,参数集

$$S^*=\{1,|g^{a_1}|,|g^{a_2}|,\cdots,|g^{a_{n-1}}|\}$$

称为有效的,如果 $n\geqslant 2$ 且满足条件

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<(p-1)/2, \tag{1}$$

$$a_1=\min\{a_1,a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_{n-1}-a_{n-2}\}<(p-1)/(2n-2), \tag{2}$$

参数集 S_1 是有效的,p 阶循环图称为有效的 p 阶循环图.

在文献[8]中,我们证明了

定理3 任意一个参数集的度数 $n\geqslant 2$ 的图 $G_p(S_1)$ 都同构于一个度数相同的有效的 p 阶循环图 $G_p(S^*)$.

3 素数阶循环图的团数

考察 $G_p(S_i)$ 的团及其团数.熟知循环图是顶点可迁的,其团数等于 $G_p(S_i)$ 中含顶点0的团的最大阶,因此我们只需要考察含顶点0的团,故有

引理1 记 $A_i=\{x:|x|\in S_i\}$,图 $G_p(S_i)$ 中的顶点集为 A_i 的导出子图记为 $G_p[A_i]$,它的团数记为 $[A_i]$,则有 $[G_p(S_i)]=[A_i]+1$.

定义3 设 $x\in A_i$,记

$$d_i(x)=|\{y\in A_i:|y-x|\in S_i\}|.$$

在 A_i 上的序 $\prec$ 规定如下:

(Ⅰ) A_i 中的二元子集 $\{a,-a\}$ 对于序 $\prec$ 构成区间,并且 $a\in S_i\Leftrightarrow a\prec -a$.

(Ⅱ) 对于 A_i 中分属不同的二元子集的元 $x\in\{a,-a\}$ 和 $y\in\{b,-b\}$ 规定 $x\prec y$ 当且仅当 $d_i(x)<d_i(y)$ 或者 $d_i(x)=d_i(y)$ 并且 $a<b$,其中 $a,b\in S_i$.

注意到 A_i 的二元子集 $\{a,-a\}$ 中有且仅有一个元属于 S_i,并且

$$y\in A_i,|y-a|\in S_i\Leftrightarrow -y\in A_i,|-y-(-a)|\in S_i.$$

故有 $d_i(a)=d_i(-a)$,由此易知上述 $\prec$ 是明确定义的,并且 $(A_i,\prec)$ 是全序集.$x\prec y$ 称为 x 前于 y 或 y 后于 x.

定义 4　全序集$(A_i, \prec)$上的长为 $k(k \geqslant 1)$ 的链 $x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k$ 称为起点是 x_0 的链，如果对于任意 $0 \leqslant h < j \leqslant k$ 有 $|x_h - x_j| \in S_i$. 起点是 x_0 的链的最大长记为 $l_i(x_0)$. 如果上述起点是 x_0 的长为 $k \geqslant 1$ 的链不存在，就记 $l_i(x_0) = 0$.

由定义 3 与定义 4 易知，$l_i(a) = 0$ 当且仅当 $d_i(a) = 0$，故有

引理 2　如果对于任意 $a \in S_i$ 有 $d_i(a) = 0$，那么$[A_i] = 1$.

由文献[6]，我们证明了

引理 3[6]　$[A_i] = 1 + \max\{l_i(a) \mid a \in S_i\}$.

4　基于并行算法的 Ramsey 数下界的计算方法

计算 Ramsey 数下界的主要困难，其一是寻找有效的参数集，构造素数阶循环图；其二是计算图的团数. 根据上述理论，我们得出基于并行算法的二色 Ramsey 数的计算方法。

算法 1　用并行算法寻找 Ramsey 数新下界的主函数

步骤 1　给定整数 $k_1, k_2 \geqslant 3$ 以及适当的素数 $p = 2m + 1 \geqslant 13$，与度数 $n \geqslant 2$，设 g 是 p 的一个原根. 按字典排列法作满足条件(1)、(2)的集合

$$\{0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$$

把它换算成有效的参数集 $S^* = \{1, |g^{a_1}|, |g^{a_2}|, \cdots, |g^{a_{n-1}}|\}$，设 S^* 的集合为 W，其中第 j 个元为 S_j^*. 令 $j = 1$.

步骤 2　令 $S_1 = S_j^*$，调用算法 2(计算团数的函数)计算 $G_p(S_i)$ 的团数 c_i，如果 $c_i < k_i$，其中 $i = 1, 2$，打印结果 $R(c_1 + 1, c_2 + 1) \geqslant p + 1$(定理 2)，运算结束.

步骤 3　令 $j = j + 1$，如果 $j \leqslant |W|$，转到步骤 2，否则，运算结束.

算法 2　计算团数的函数

步骤 1　对于有效的参数集 S_i，令 $i = 1$.

步骤 2　令 $A_i = \{x : |x| \in S_i\}$，对于 $x \in A_i$，计算

$$d_i(x) = |\{y \in A_i : |y - x| \in S_i\}|.$$

如果对于任意 $a \in S_i$ 有 $d_i(a) = 0$，令$[A_i] = 1$，转到步骤 4；否则，根据定义 3 作全序集$(A_i, \prec)$.

步骤 3　根据定义 4，对于任意 $a \in S_i$，计算 $l_i(a)$，并且由引理 3 确定$[A_i] = 1 + \max\{l_i(a) \mid a \in S_i\}$.

步骤 4　由引理 1 确定 $c_i = [A_i] + 1$. 如果 $c_i \geqslant k_i$，返回主函数.

步骤 5　如果 $i = 1$，令 $i = 2$，$S = [1, m]$，$S_2 = \{x \in S \mid x \notin S_1\}$，转到步骤 2. 否则，返回主函数.

例 1　给定整数 $k_1 = 3$，$k_2 = 5$，素数 $p = 13$，度数 $n = 2$，p 的一个原根 $g = 2$. 令 $S = [1, 6]$，根据条件(1)、(2)有

$$\{0, a_1\} = \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,4\}, \{0,5\}\}.$$

可确定度数为 $n = 2$ 的有效参数集的集合

$$W = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,3\}, \{1,6\}\}.$$

按照算法 1，计算到 $j = 3$ 时，有 $S_3^* = \{0, 3\}$，参数集 $S_1 = \{1, 5\}$，$S_2 = \{2, 3, 4, 6\}$，按照算法 2 计算得 $c_2 = 2$，$c_2 = 4$，根据定理 2 得到 $R(3,5) \geqslant 14$，运算结束.

迄今已知的准确值是 $R(3,5) = 14$，因此例 1 得到的 $R(3,5) \geqslant 14$ 便是下确界. 注意到，

用一般的方法构作 13 阶循环图,必须考虑的参数集有

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}$,其组合数有$\binom{6}{2}=15$ 种情形.

而例 1 只须考虑 $|W|=5$ 种情形,可见算法 1 具有较高的运算效率.

当 p 值较大时,算法 1 的运算效率更高,但仍然要遇到非常巨大的运算量,此时用并行处理方法其效果会更好.

5 定理 1 的证明

给定整数 $k_1=3, k_2=24$,素数 $p=139$,度数 $n=11$,p 的一个原根 $g=2$. 按照算法 1,使用并行算法寻找到参数集 $S_1=\{1,4,13,20,27,34,36,42,45,53,64\}$,进入算法 2,得到

(Ⅰ)对于任意 $a\in S_i$ 有 $d_i(a)=0$,故由引理 2 得$[A_1]=1$,据引理 1 得 $c_1=[G_p(S_1)]=2$.

(Ⅱ)令 $S=[1,69]$,$S_2=\{x\in S|x\in S_1\}$,$a\in S_2$,据定义 3 计算得

$d_2(10)=93$,$d_2(2)=d_2(6)=d_2(12)=d_2(15)=d_2(18)=d_2(24)=d_2(25)=d_2(29)=d_2(31)=d_2(39)=d_2(43)=d_2(48)=d_2(50)=d_2(51)=d_2(56)=d_2(57)=d_2(59)=95$,$d_2(2)=d_2(67)=d_2(68)=96$,$d_2(3)=d_2(16)=d_2(17)=d_2(21)=d_2(23)=d_2(28)=d_2(32)=d_2(35)=d_2(37)=d_2(38)=d_2(46)=d_2(47)=d_2(58)=d_2(60)=d_2(61)=d_2(62)=d_2(65)=d_2(66)=d_2(69)=97$,$d_2(8)=d_2(26)=d_2(54)=d_2(55)=98$,$d_2(7)=d_2(9)=d_2(14)=d_2(19)=d_2(22)=d_2(30)=d_2(44)=d_2(52)=d_2(63)=99$,$d_2(11)=d_2(40)=d_2(49)=100$,$d_2(41)=101$,$d_2(33)=102$.

作全序集$(S_2,\prec)=\{10,-10,5,-5,6,-6,12,-12,15,-15,\cdots\}$,按照定义 3 计算 S_2 色的链,求得第一条长为 21 的链是

$10\prec 5\prec -5\prec 12\prec 24\prec 43\prec -57\prec 68\prec 68\prec -16\prec 21\prec -28\prec 38\prec -38\prec -66\prec -14\prec 19\prec -19\prec 49\prec -49\prec 33$.

并且没有长度超过 21 的链,故有 $l_2(10)=21$. 对于任意 $a\in S_2$,都有 $l_2(a)\leqslant 21$,据引理 3 得到$[A_2]=1+\max\{l_2(a):a\in S_2\}=22$,据引理 1 得 $c_2=[G_p(S_2)]=23$.

据定理 2,就得到 $R(3,24)\geqslant 140$. 再引用文献[1] 记录的公式

$R(k,p+q-1)\geqslant R(k,p)+R(k,q)+k-3$.

由 $R(3,2)=3$ 与 $R(3,24)\geqslant 140$ 就得到 $R(3,25)\geqslant 143$. 这就证明了定理 1.

由于寻找有效参数集构造素数阶循环图的运算涉及到巨大的运算量,因此我们应用 4 台计算机(AMD1700)作并行计算,上述运算所需要时间仅为 48 h,如果采用单机运算,估计运算时间要 150 h 以上。

参考文献

1 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics,2002,DS1 #9:1~42.

2 苏文龙,罗海鹏,李 乔. 多色经典 Ramsey 数 $R(q,q,\cdots,q)$ 的下界. 中国科学(A 辑),1999,29(5):408~413.

3 苏文龙,罗海鹏,李 乔. 经典 Ramsey 数 $R(4,12)$,$R(5,11)$ 和 $R(5,12)$ 的新下界. 科学通报,1997,42(22):2460.

4 罗海鹏，苏文龙，李　乔．经典 Ramsey 数 $R(6,12)$，$R(6,14)$ 和 $R(6,15)$ 的新下界．科学通报，1998，43(12)：1336～1337．

5 苏文龙，罗海鹏，李　乔．7 个经典 Ramsey 数 $R(k,l)$ 的新下界．系统科学与数学，2000，20(1)：55～57．

6 Su Wenlong，Luo Haipeng，Zhang Zhengyou et al.．New lower bounds of fifteen classical Ramsey numbers．Australasian Journal of Combinatorics，1999，19：91～99．

7 Su Wenlong，Luo Haipeng，Shen Yunqiu．New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(5,13)$ and $R(5,14)$．Applied Mathematics Letters，1999，12：121～122．

8 Luo Haipeng，Su Wenlong，Yun-Qiu Shen．New lower bounds of ten classical Ramsey numbers．Australasian Journal of Combinatorics，2001，24：81～90．

9 Luo Haipeng，Su Wenlong，Li Zhenchong．The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers．Australasian Journal of Combinatorics，2002，25：103～116．

10 Su Wenlong，Li Qiao，Luo Haipeng et al.．Lower bounds of Ramsey numbers based on cubic residues．Discrete Mathematics，2002，250：197～209．

11 Li Guiqing，Su Wenlong，Luo Haipeng．Edge colorings of the complete graph K_{149} and the lower bounds of three Ramsey numbers．Discrete Applied Mathematics，2003，126：167～179．

12 Su Wenlong，Wu Kang，Luo Haipeng．The Normal Subgroup of Cyclic Group and the Estimation of Lower Bounds about Ramsey Numbers．In：Combinatorics and Graph Theory'97，Singapore：World Scientific Publishing Co Pte Ltd，1997．

13 Su Wenlong，Luo Haipeng，Su Yunlin．The application of cyclic graphs of prime number orders to the investigation of lower bounds of Ramsey numbers．Proceedings of the Thirteenth Australasian Workshop on Combinatorial Algorithems(AWOCA)．2002．

14 Wu Kang，Su Wenlong，Luo Haipeng．New lower bounds for 8 classical multicolor Ramsey numbers．Journal of Guangxi Academy of Science，2000，16(2)：63～64．

（责任编辑：黎贞崇）

广西建设工程量清单计价系统通过鉴定

广西建设工程造价管理总站和广西南宁博奥科技有限责任公司合作开发的“广西建设工程量清单计价系统”，2003 年 8 月 22 日在南宁市通过了自治区建设厅主持的技术鉴定。

该系统的应用软件采用 Borland C＋＋ Builder 开发，由土建、安装、市政、园林、修缮和装饰等 6 个子系统组成，每个子系统均含档案管理、系统维护、定额和数据管理、工程量清单计价管理、报表管理 5 个模块。应用软件按国家标准《建设工程量清单计价规范》(GB50500-2003)工作流程设计，符合《广西建设工程量清单计价应用指南》的要求。

该系统计算准确、快速，应用于造价 1000 万元，包含 200 多个子目的土建工程，价格计算、报表生成的时间为 18 s；试用期间，组织了多位造价工程师对 3 个工程分别用手工和该软件进行计算，误差在 0.01％以下。该系统已在广西建设工程招标投标事务所、广西建筑综合工程监理有限公司、广西瑞真工程造价咨询有限责任公司、自治区建设工程机电设备招标中心、广西市政工程有限责任公司等单位使用，界面友好，易学易用，很受用户欢迎。广西建设工程量清单计价系统对提高广西建筑工程量清单报价的计算机编制水平、工作水平和工作效率具有重大的意义，处于自治区内领先水平，达到国内同类软件的先进水平。

（罗海鹏）