环的亚优越扩张*

Subexcellent Extensions of Rings

廖贻华，易 忠

Liao Yihua，Yi Zhong

（广西师范大学数学与计算机科学学院，广西桂林 541004）

（College of Math. & Comp. Sci.，Guangxi Normal Univ.，Guilin，Guangxi，541004，China）

摘要：引进环的亚优越扩张的概念，并证明若 $S \geqslant R$ 是亚优越扩张，则 S 是左凝聚环当且仅当 R 是左凝聚环.

关键词：凝聚环 亚优越扩张 优越扩张 有限表现模 有限正规扩张

中图法分类号：O153.3；O154.2

Abstract：The concept of subexcellent extension is introduced. It is proved that if $S \geqslant R$ is a sub excellent extension then S is left coherent ring if and only if R is left coherent ring.

Key words：coherent ring，sub excellent extension，excellent extension，finitely presented module，finite normalizing extension

S 是一个环，R 是 S 的子环而且 S 与 R 有相同的单位元. 文中所有的环都是有单位元 1 的结合环，所有的模都是酉模. 环扩张 $S \geqslant R$ 称为一个优越扩张，如果

（1）S 是 R 的 1 个自由正规扩张，且有 1 个含有单位元 1 的基；即，存在 S 的有限子集 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 使 $a_1 = 1, S = \sum_{i=1}^{n} Ra_i, Ra_i = a_iR, i = 1, 2, \cdots, n$ 且 S 作为左、右 R- 模是 1 个以 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 的自由模；

（2）S 是右 R- 投射的；即若 N_S 是 M_S 的子模，则 $N_R | M_R$ 可推出 $N_S | M_S$，这里 $N_R | M_R$ 代表 N 是 M 的直和项. 优越扩张是由 Passman[1] 引进，而被 Bonami[2] 命名，现已被广泛研究[1~7]. 优越扩张的例子包括有限阶矩阵环[1] 和交叉积（crossed products）$R * G$，其中 G 是 1 个 $|G|^{-1} \in R$ 的有限群[4]. Xue Weimin[5] 引进几乎优越扩张，给出 2 个例子说明此概念是优越扩张的非平凡推广，并证明了如果 S 是 R 的几乎优越扩张，则 S 是右凝聚的当且仅当 R 是右凝聚的[6]. 本文将引进亚优越扩张的概念，并证明并讨论亚优越扩张对凝聚环的影响.

这里先给出与本文结论相关的基本概念环结论.

定义 1 环扩张 $S \geqslant R$ 称为 1 个亚优越扩张，如果

（1）$S \geqslant R$ 是 R 的 1 个有限正规扩张，即存在 S 的有限子集 $\{a_1, \cdots, a_n\} \subseteq S$ 使 $S = \sum_{i=1}^{n} Ra_i, Ra_i = a_iR, i = 1, 2, \cdots, n$；

（2）S_R 是平坦模，而 ${}_RS$ 是有限表现模；

（3）S 是右 R- 投射的；（即若 N_S 是 M_S 的子模，则 $N_R | M_R$ 可推出 $N_S | M_S$，这里 $N_R | M_R$ 代表 N 是 M 的直和项.）

注意到环扩张 $S \geqslant R$ 称为 1 个几乎优越扩张是指：

（1）$S \geqslant R$ 是 R 的一个满足 S_R 是投射模而 ${}_RS$ 是平坦模的有限正规扩张；

（2）S 是右 R- 投射的.

显然每个优越扩张是亚优越扩张，而几乎优越扩张未必是亚优越扩张，亚优越扩张也未必是几乎优越扩张.

凝聚环首先由 Chase[8] 引进，并给出下列刻画.

引理 1 令 R 为一个环. 则下列陈述等价：

（1）R 是左凝聚环；

（2）每个有限表现左 R- 模是凝聚模；

（3）每个自由左 R- 模的任意有限生成子模是有限表现模；

（4）每个平坦右 R- 模的任意直积是平坦模；

（5）对任意集合 X，有 R_R^X 是平坦模.

（6）对 $a \in R$ 及 R 的任意理想 I，都有 $(I : a)$ 是有限生成的；

（7）对 $a \in R$ 都有 $(0 : a)$ 是有限生成的左理想；

2003-11-18 收稿。

* 教育部“优秀青年教师资助计划”（2002-40）、广西自然科学基金（O135005）、广西十百千人才基金（99217）和广西师范大学科研基金资助项目.

并且 R 的任意有限生成左理想的交是有限生成的.

Lenzing[9]通过张量积刻画有限生成模,有限表现模,给出下列结论.

引理2 R-模是有限表现模(有限生成的)当且仅当由 $(r_i)\otimes m \mapsto (r_i m)$ 给定的典范映射 $R^X \otimes_R M_S \to M_S^X$ 对任给的集合 X 都是同构(满同态).

定理 若环扩张 $S \geqslant R$ 称为1个亚优越扩张,则 S 是左凝聚环当且仅当 R 是左凝聚环.

证明 $(\Leftarrow)$ 若 R 是左凝聚环,由引理1,对任意的集合 X,有 R_R^X 是平坦 R-模. 由[10]可知 $\mathrm{Hom}_Z(R_R^X, Q/Z)$ 是内射左 R-模,由于 S_R 是平坦右 R-模,于是对任意的左 S-模正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

于是有

$$0 \to S_R \otimes A \to S_R \otimes B \to S_R \otimes C \to 0$$

是1个左 R-模正合列,而 $E = \mathrm{Hom}_Z(R_R^X, Q/Z)$ 是内射左 R-模,于是有

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(S_R \otimes C, E) \to \mathrm{Hom}_R(S_R \otimes B, E) \to \mathrm{Hom}_R(S_R \otimes A, E) \to 0$$

是1个正合列. 而相伴性定理给出

$$\mathrm{Hom}_R(S_R \otimes A, E) \cong \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(S, E)),$$

故有

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, \mathrm{Hom}_R(S, E)) \to \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_R(S, E)) \to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(S, E)) \to 0.$$

这表明 $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_Z(R_R^X, Q/Z)) = \mathrm{Hom}_R(S, E)$ 是内射左 S-模.

而由有左 S-模同构

$$\mathrm{Hom}_Z(R^X \otimes_R S, Q/Z)) \cong \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_Z(R_R^X, Q/Z)),$$

有 $(R^X \otimes_R S)^* = \mathrm{Hom}_Z(R^X \otimes_R S, Q/Z))$ 也是内射左 S-模. 于是由文献[10]的引理19.14,有 $R^X \otimes_R S$ 是平坦右 S-模. 于是利用 $S \geqslant R$ 为1个亚优越扩张,${}_RS$ 是有限表现模,引理2指出由 $(r_i)\otimes s \mapsto (r_i s)$ 给定的典范映射 $R^X \otimes_R S_S \to S_S^X$ 对任给的集合 X 都是同构. 故 $S_S^X \cong R^X \otimes_R S_S$ 是平坦右 S-模. 因此 S 是左凝聚环.

$(\Rightarrow)$ 反过来,若 S 是左凝聚环,对于任意的集合 X,S_S^X 是平坦右 S-模. 而 ${}_RS$ 是有限表现模,故 $R^X \otimes_R S_S \cong S_S^X$. 因此 $R^X \otimes_R S_S$ 是平坦右 S-模. 故 $(R^X \otimes_R S)^* = \mathrm{Hom}_Z(R^X \otimes_R S, Q/Z))$ 也必定是内射左 S-模,由左 S-模同构

$$\mathrm{Hom}_Z(R^X \otimes_R S, Q/Z)) \cong \mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_Z(R_R^X, Q/Z)).$$

有 $\mathrm{Hom}_R(S, \mathrm{Hom}_Z(R_R^X, Q/Z))$ 是内射左 S-模. 而 $S \geqslant R$ 是 R 的1个有限正规扩张,于是由文献[11]的推论2有 $\mathrm{Hom}_Z(R^X, Q/Z))$ 是内射左 R-模. 于是有 R^X 是平坦右 R-模. 因此 R 是左凝聚环. 证毕.

由于每个优越扩张是亚优越扩张,故有下列结论:

推论 若环扩张 $S \geqslant R$ 称为1个优越扩张,则 S 是左凝聚环当且仅当 R 是左凝聚环.

参考文献:

1 Passman D S. The Algebra Structure of Group Rings. New York: Wiley-Interscience, 1977.

2 Bonami L. On the structure of skew group rings, In: Algebra Berichte 48. Munchen: Verlag Reinhard Fischer, 1984.

3 Parmenter M M, Stewart P N. Excellent extensions. Comm Alg, 1988, 16: 703～713.

4 Passman D S. It's essentially Maschke's theorem. Rocky Mountain J Math, 1983, 13: 37～54.

5 Xue Weimin. On generalization of excellent extensions. Acta Math Vietnam, 1994, 19(2): 31～38.

6 Xue Weimin. On almost excellent extensions. Algebra Colloq, 1996, 3: 125～134.

7 Liao Yihua, et al. π-Coherence of (strongly) almost excellent extensions. Chinese Quarterly J Math, 2002, 117(2): 22～25.

8 Chase S U. Direct products of modules. Trans Amer Math Soc, 1967, 97: 457～473.

9 Lenzing V H. Endlich präsentierbare module, Arch Math, 1969, 20: 262～266.

10 Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categorirs of Modules. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1974. 177～249.

11 Soueif L. Normalizing extensions and injective modules, essentially bounded normalizing extensions. Comm Alg, 1987, 15(8): 1607～1619.

(责任编辑:黎贞崇)