用多项式构造广义范德蒙矩阵的逆

Structure of Generalized Vandermonde Inverse Matrix by Polynomial

李大林

Li Dalin

(柳州职业技术学院基础部,广西柳州 545006)

(Dept. for Basic Courses, Liuzhou Vocational & Tech. Coll., Liuzhou, Guangxi, 545006, China)

摘要:应用构造 n 个多项式方法,将 n 个多项式的系数向量构成 n 阶广义范德蒙矩阵 D^{-1}. 特别地,该方法可构造范德蒙矩阵的逆.

关键词:广义范德蒙矩阵 逆 矩阵函数 多项式

中图法分类号:O151.21

Abstract: n polynomials are structured for n order generalized Vandermonde matrix D. D^{-1} is structured by their coefficient vectors. Vandermonde inverse matrix is obtained in this way.

Key words: generalized Vandermonde matrix, inverse, matrix function, polynomial

矩阵函数在工程技术中有着广泛应用. 而在矩阵函数的计算中,广义范德蒙矩阵[1]

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_s & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_1^2 & P_2^1\lambda_1 & \cdots & P_2^{c_1-1}\lambda_1^{3-c_1} & \lambda_2^2 & P_2^1\lambda_2 & \cdots & P_2^{c_2-1}\lambda_2^{3-c_2} & \cdots & \lambda_s^2 & P_2^1\lambda_s & \cdots & P_2^{c_s-1}\lambda_s^{3-c_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & P_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} & \cdots & P_{n-1}^{c_1-1}\lambda_1^{n-c_1} & \lambda_2^{n-1} & P_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} & \cdots & P_{n-1}^{c_2-1}\lambda_2^{n-c_2} & \cdots & \lambda_s^{n-1} & P_{n-1}^1\lambda_s^{n-2} & \cdots & P_{n-1}^{c_s-1}\lambda_s^{n-c_s} \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i\neq\lambda_j$. 当 $k\leqslant m$ 时,$P_m^k=m(m-1)\cdots(m-k+1)$;当 $k>m$ 时,$P_m^k=0$,它占有重要地位. 广义范德蒙矩阵与文献[2]的固定矩阵有关,用求导法计算矩阵函数时出现的线性方程组的系数矩阵[3~4]正是它的转置矩阵. 而 D 可逆[2],求 D^{-1} 是计算矩阵函数的关键. 可是,当 $n,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为参数,用常规方法求 D^{-1} 时,由于抽象符号过多而计算很复杂. 本文通过构造多项式解决这一问题.

根据 λ_i 的不同,D 的列向量分为 s 组,其中第 i 组包括 c_i 个列向量.

定理 1 设广义范德蒙矩阵 D 的第 i 组第 j 个列向量对应的多项式为

$$\varphi_{ij}(\lambda)=(b_{ij0}+b_{ij1}\lambda+\cdots+b_{ijc_{i-1}}\lambda^{c_{i-1}})(\lambda_1-\lambda)^{c_1}\cdots(\lambda_{i-1}-\lambda)^{c_{i-1}}(\lambda_{i+1}-\lambda)^{c_{i+1}}\cdots(\lambda_s-\lambda)^{c_s},$$

其中 $b_{ij0},b_{ij1},\cdots,b_{ij,c_{i-1}}$ 的取值使下式成立:

$$\varphi_{ij}^{(j-1)}(\lambda_i)=1,\text{且 }\varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda_i)=0,(k\in\{1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,c_i\}),\qquad(1)$$

其中 $\varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda)$ 表示 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 的 $k-1$ 阶导数. 则 $\varphi_{ij}(\lambda)$($i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,c_i$)按升幂排列的系数行向量 $X_{ij}=(a_{ij0},a_{ij1},a_{ij2},\cdots,a_{ij(n-1)})$ 构成 D^{-1},即

$$D^{-1}=(X_{11}^T,X_{12}^T,\cdots,X_{1c_1}^T,X_{21}^T,X_{22}^T,\cdots,X_{2c_2}^T,\cdots,X_{s1}^T,X_{s2}^T,\cdots,X_{sc_s}^T)^T.$$

证明 因为 $\varphi_{ij}(\lambda)=a_{ij0}+a_{ij1}\lambda+\cdots+a_{ijk}\lambda^k+a_{ij(k+1)}\lambda^{k+1}+\cdots+a_{ij(n-1)}\lambda^{n-1}$,所以

$$\varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda)=0+\cdots+0+a_{ij(k-1)}P_{k-1}^{k-1}+a_{ijk}P_k^{k-1}\lambda+\cdots+a_{ij(n-1)}P_{n-1}^{k-1}\lambda^{n-k},(k\leqslant n),$$

由(1)式,$X_{ij}=(a_{ij0},a_{ij1},\cdots,a_{ij(j-1)},a_{ijj},\cdots,a_{ij(n-1)})$ 左乘第 i 组的第 j 列的结果为

$$0a_{ij0}+\cdots+0a_{ij(j-2)}+a_{ij(j-1)}P_{j-1}^{j-1}+a_{ijj}P_j^{j-1}\lambda_i+\cdots+a_{ij(n-1)}P_{n-1}^{j-1}\lambda_i^{n-j}=\varphi_{ij}^{(j-1)}(\lambda_i)=1,$$

X_{ij} 左乘第 i 组的第 k 列的结果为

$$0a_{ij0}+\cdots+0a_{ij(k-2)}+a_{ij(k-1)}P_{k-1}^{k-1}+a_{ijk}P_k^{k-1}\lambda_i+\cdots+a_{ij(n-1)}P_{n-1}^{k-1}\lambda_i^{n-k}=\varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda_i)=0,(k\neq j).$$

又对于其它组,不妨设对于第 1 组($i\neq1$),由于 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 中有因子 $(\lambda_1-\lambda)^{c_1}$,故 $\varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda)$,($k\leqslant c_1$)中仍包含有因子 $\lambda_1-\lambda$,即 $\varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)q(\lambda)$. 所以 X_{ij} 左乘第 1 组的第 k 个列向量的结果为

$$0a_{ij0}+\cdots+0a_{ij(k-2)}+a_{ij(k-1)}P_{k-1}^{k-1}+a_{ijk}P_k^{k-1}\lambda_1+\cdots$$

2004-02-24 收稿。

$+ a_{ij(n-1)}P_{n-1}^{k-1}\lambda_1^{n-k} = \varphi_{ij}^{(k-1)}(\lambda_1) = 0.$

可见，X_{ij} 左乘其它组的列向量的结果均为零，所以有

$(X_{11}^T, X_{12}^T, \cdots, X_{1c_1}^T, X_{21}^T, X_{22}^T, \cdots, X_{2c_2}^T, \cdots, X_{s1}^T, X_{s2}^T, \cdots, X_{sc_s}^T)^T D = E,$

故命题成立. 证毕.

例 1 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{bmatrix}$，试用多项式构造 A^{-1}.

解 利用(1)式构造4个多项式. 以第二个多项式为例，说明其计算过程. 设

$$\varphi_{12}(\lambda) = (b_{120} + b_{121}\lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda), \quad (2)$$

由(1)式，$\varphi_{12}(\lambda_1) = 0, \varphi_{12}'(\lambda_1) = 1$，故

$$\begin{cases} (b_{120} + b_{121}\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) = 0, \\ b_{121}(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) - (b_{120} + b_{121}\lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) - (b_{120} + b_{121}\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) = 1, \end{cases}$$

解得：$b_{120} = \dfrac{-\lambda_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, b_{121} = \dfrac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$. 代入(2)式，得

$$\varphi_{12}(\lambda) = \frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}\lambda + \frac{-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}\lambda^2 + \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}\lambda^3,$$

$$X_{12} = \left(\frac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \frac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \frac{-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}\right),$$

同理可求 X_{11}, X_{21}, X_{31}. 根据定理，$A^{-1} = (X_{11}^T, X_{12}^T, X_{21}^T, X_{31}^T)^T$，即

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{bmatrix}^T,$$

其中，$\alpha_1 = \dfrac{3\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2}$;

$\alpha_2 = \dfrac{-\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$; $\alpha_3 = \dfrac{\lambda_1^2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_2)}$;

$\alpha_4 = \dfrac{\lambda_1^2\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)}$;

$\beta_1 = \dfrac{-3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1^2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_3^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2}$;

$\beta_2 = \dfrac{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$; $\beta_3 = \dfrac{-\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_2)}$;

$\beta_4 = \dfrac{-\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)}$;

$\gamma_1 = \dfrac{3\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2}$;

$\gamma_2 = \dfrac{-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$; $\gamma_3 = \dfrac{2\lambda_1 + \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_2)}$;

$\gamma_4 = \dfrac{2\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)}$;

$\delta_1 = \dfrac{-2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2}$; $\delta_2 = \dfrac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}$;

$\delta_3 = \dfrac{-1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_3 - \lambda_2)}$; $\delta_4 = \dfrac{-1}{(\lambda_1 - \lambda_3)^2(\lambda_2 - \lambda_3)}$.

当每组只有一个列向量时，D 为范德蒙矩阵. 它的可逆性易知. 而它的逆用常规方法不易求得. 用本文的方法容易获得它的逆.

推论 1 对于范德蒙矩阵

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_i & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_i^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_i^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_i \neq \lambda_j, (i \neq j)$,

设 $\Omega_i = \{1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n\}$,

$\sum\limits_{j_1, j_2, \cdots, j_{n-k} \in \Omega_i} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{n-k}}$ 表示 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_n$ 中所有可能的 $n-k$ 个不同的数乘积之和，$\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_{i-1} - \lambda)(\lambda_{i+1} - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$，则 $V^{-1} = (a_{ik})_{n\times n}$，其中

$$a_{ik} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-1}\sum\limits_{j_1, j_2, \cdots, j_{n-k} \in \Omega_i} \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{n-k}}}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)}, \\ \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1), \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)}, \quad (k = n). \end{cases}$$

证明 令 $\varphi_{i1}(\lambda) = b_{i10}\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda)$. 由(1)式，$\varphi_{i1}(\lambda_i) = 1$，故 $b_{i10} = \dfrac{1}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)}$. 故 $\varphi_{i1}(\lambda)$ 的展开式为：

$$\frac{\prod\limits_{j\in\Omega_i}\lambda_j}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)} - \frac{\sum\limits_{j_1, \cdots, j_{n-2} \in \Omega_i}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{n-2}}}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_{j_i})}\lambda + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}\sum\limits_{j_1, \cdots, j_{n-k} \in \Omega_i}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\cdots\lambda_{j_{n-k}}}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)}\lambda^{k-1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{\prod\limits_{j\in\Omega_i}(\lambda_j - \lambda_i)}\lambda^{n-1},$$

(下转第136页)

相邻,则

(Ⅰ)$q \leftarrow q+1$;$B(q,i,j) \leftarrow B(y,i,j)$;消去 $B(q,i,j)$ 中第 k_1 行的所有1,计算度序列 $g(q) \leftarrow g(q) \times n_0 + d(k_1)$;累计删除的边数 $m(q) \leftarrow m(q) + d(k_1)$;

(Ⅱ)消去 $B(y,i,j)$ 中第 k_2 行的所有的1;计算 $g(y) \leftarrow g(y) \times n_0 + d(k_2)$;累加删除的边数 $m(y) \leftarrow m(y) + d(k_2)$;

否则消去 $B(y,i,j)$ 中第 k 行的所有的1;

$g(y) \leftarrow g(y) \times n_0 + d(k)$;

$m(y) \leftarrow m(y) + d(k)$;

如果 $m \neq m(y)$ 则转222;输出 $g(y)(f(y))$

end;

注:$m = |E|$.

比较 G 和 F 的度序列 $g(1), g(2), \cdots, g(q)$ 与 $f(1), f(2), \cdots, f(q)$,如果有相同者则转333,否则打印"G 与 F 不同构"而结束;

333:对 $i = 1,2,\cdots,l$,而 $j = 1,2,\cdots,P_i$,如果 $(n_i = m_i) \wedge \forall n_{ij} \in \{m_{i1}, m_{i2}, \cdots, m_{iP_i}\} \wedge \forall m_{ij} \in \{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{iP_i}\}$,则打印"$G$ 与 F 同构",否则打印"G 与 F 不同构"

end

3 算法分析

(Ⅰ)求图的度序列的所需时间:

(a) 求各顶点的度数及其顶点的最大度数,求最大度数的顶点数为 $n \times n + n + n = 0(n^2)$;

注:$n = |V|$.

(b) 在 S 个顶点中寻与其余 $S-1$ 个顶点皆相邻的顶点以及不相邻的顶点为 $S \times S + (S-1) \times (S-1-i) < S \times S + S \times S < n \times n + n \times n = O(n^2)$;

(c) 转换数组,删除②中所寻的顶点及其关联的边为 $n^2 + n + n = O(n^2)$;

以上各步最多循环 $q(< l < n)$ 次,每次执行GOTO 222不超过 l 次,其时间为 $O(n^4)$;

(Ⅱ)比较两图的度序列所需时间为 $q \times q \leqslant n \times n = O(n^2)$;

(Ⅲ)由于 $l < n$ 且 $n > n-1 \geqslant P_1 \geqslant P_2 \geqslant \cdots \geqslant P_l$,检查各次顶点的度及其关联的度集合所需时间为 $O(n^2)$.

因此,判定图 G 与图 F 同构所需时间为

$$O(n^4) + O(n^4) + O(n^2) + O(n^2) = O(n^4).$$

参考文献:

1 罗示丰.两图同构的判别准则及其复杂性.计算机科学,1997,(10):148~153.

2 加里 M B,约翰逊 D S.计算机和难解性.张立昂译.北京:科学出版社,1987.

3 华南工学院高等数学教研室,电子计算机软件教研组编.电子计算机与算法语言.北京:人民教育出版社,1978.13~165.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第128页)

由定理,命题成立.证毕.

参考文献:

1 陈景良,陈向辉.特殊矩阵.北京:清华大学出版社,2001.165.

2 李大林.利用固定矩阵计算亏损矩阵的幂级数之和.广西科学,2003,10(4):285~261.

3 李德光.求 n 阶 m 次方幂的一个公式.湘潭矿业学院学报,1994,9(4):80~81.

4 陈祖明,周家胜.矩阵论引论.北京:北京航空航天大学出版社,1998.333~338.

(责任编辑:黎贞崇)