二色 Ramsey 数 $R(5,29)$ 的下界*
Lower Bound for Two-colour Ramsey Number $R(5,29)$

罗海鹏[1],苏文龙[2],吴　康[3],黎贞崇[1]
Luo Haipeng[1], Su Wenlong[2], Wu Kang[3], Li Zhenchong[1]
(1. 广西科学院,广西南宁　530022;2. 广西大学梧州分校,广西梧州　543002;3. 华南师范大学数学系,广东广州　510631)
(1. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530022, China; 2. Guangxi University Wuzhou Branch, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 3. Math. Dept., South China Normal Univ., Guangzhou, Guangdong, 510631, China)

摘要:改进素数阶循环图的方法,得到1个二色 Ramsey 数的新下界:$R(5,29)\geqslant 614$.
关键词:Ramsey 数　下界　素数阶循环图
中图法分类号:O157.5;TP312
Abstract: A method on prime order cyclic graph is improved. A new lower bound for two-colour Ramsey number is obtained: $R(5,29)\geqslant 614$.
Key words: Ramsey number, lower bound, prime order cyclic graph

1 Ramsey 数 $R(5,29)$ 的下界

经典 Ramsey 数的计算是组合数学中非常困难的问题.动态综述论文[1]记录迄今已知的二色 Ramsey 数 $R(5,q)$ 的准确值 $R(5,3)=14$, $R(5,4)=25$, 以及 $5\leqslant q\leqslant 23$ 时 $R(5,q)$ 的一些下界(表1).

表 1　已知的 $R(5,q)$ 下界

q	5	6	7	8	9	…	21	22	23
下界	43	58	80	101	121	…	433	485	509

本文在参考文献[2～11]的基础上,利用了改进的素数阶循环图的方法,得到了

定理 1　$R(5,29)\geqslant 614$.

根据参考文献[1],这是一个新的结果.

2 若干定义和引理

给定素数 $p=2m+1$,记 $Z_p=\{-m,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,m\}=[-m,m]$(对于整数 $s<t$,记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$).以下除非另有说明,所有整数及其运算结果都理解为模 p 后属于 Z_p,并用通常的等号"="表示"模 p 相等".

定义 1　对于集合 $S=[1,m]$ 的一个2部分拆 $S=S_1\cup S_2$,设 p 阶完全图 K_p 的顶点集 $V=Z_p$,边集 E 是 Z_p 的所有2元子集的集且有分拆 $E=E_1\cup E_2$,其中

$E_i=\{\{x,y\}\mid\{x,y\}\in E$ 且 $|x-y|\in S_i\}$, $i=1,2$.

把 E_i 中的边叫做 S_i 色的,记 K_i 中 S_i 色边所导出的子图为 $G_p(S_i)$,其团数记为 $[G_p(S_i)]$,这里 $i=1,2$.于是本文按照参数集合把 K_p 的边2-染色.

据 Ramsey 定理,显然有

引理 1　设 $k_i=[G_p(S_i)]$, $i=1,2$,则 $R(k_1+1,k_2+1)\geqslant p+1$.

引理 2　设 $b\in Z_p$,则 Z_p 到自身的变换 $f: x\mapsto -x+b$ 是 $G_p(S_i)$ 的同构变换.

证明　显然 f 是顶点集 V 的 $1-1$ 变换.对于任意 $x,y\in Z_p$,恒有

$|x-y|\in S_i\Leftrightarrow|f(x)-f(y)|=|x-y|\in S_i$.

因此 f 把 S_i 色边变换成 S_i 色边.//

对于任意 $i\in\{1,2\}$,考察 $G_p(S_i)$ 的团和团数.由于循环图是顶点可迁的,因此 $G_p(S_i)$ 的团数等于 $G_p(S_i)$ 中含顶点0的团的最大阶,本文只须考察含顶点0的团.据定义1知这样的团的其他非零顶点

2004-06-21 收稿。
*国家自然科学基金(10161003)和广西自然科学基金(桂科自0447010)资助项目.

是集合 $A_i=\{x:|x|\in S_i\}$ 的元．故有

引理3 记 $A_i=\{x:|x|\in S_i\}$，在图 $G_p(S_i)$ 中顶点集为 A_i 的导出子图为 $G_p[A_i]$，$G_p[A_i]$ 的团数为 $[A_i]$，则有

$[G_p(S_i)]=[A_i]+1$. //

于是求 $G_p(S_i)$ 的团数就转化为求 $G_p[A_i]$ 的团数．为了求得 $[A_i]$，引进 A_i 的一个全序．

定义2 设 $x\in A_i$，记

$d_i(x)=|\{y\in A_i:|x-y|\in S_i\}|$.

在 A_i 上的序 $\prec$ 规定如下：

(1)A_i 中的二元子集 $\{a,-a\}$ 对于序 $\prec$ 构成区间，并且 $a\prec -a$.

(2) 对于 A_i 中分属不同的二元子集的元 $x\in\{a,-a\}$ 和 $y\in\{b,-b\}$，规定 $x\prec y$ 当且仅当 $d_i(a)<d_i(b)$，或者当 $d_i(a)=d_i(b)$ 时 $a<b$.

注意到，A_i 的二元子集 $\{a,-a\}$ 中有且仅有一个元属于 S_i，并且

$y\in A_i,|y-a|\in S_i\Leftrightarrow -y\in A_i,|-y+a|\in S_i$.

故有 $d_i(a)=d_i(-a)$，由此易知序 $\prec$ 是明确定义的，并且 $(A_i,\prec)$ 是全序集．$x\prec y$ 称为 x 前于 y 或 y 后于 x.

定义3 全序集 $(A_i,\prec)$ 上的长为 $k(k\geqslant 1)$ 的链 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$ 称为起点为 x_0 的长为 k 的 S_i 色的链，如果对于 $0\leqslant h<j\leqslant k$ 有 $|x_h-x_j|\in S_i$. 起点是 x_0 的链的最大长记为 $l_i(x_0)$. 如果起点是 x_0 的长为 $k\geqslant 1$ 的链不存在，就令 $l_i(x_0)=0$.

引理4[6] $[A_i]=1+\max\{l_i(a):a\in S_i\}$. //

3 定理1的证明

取素数 $p=613$，则 $m=306$. 设

$S_1=\{1,2,8,9,15,19,21,23,25,28,35,36,39,42,45,48,52,54,55,58,61,62,65,66,71,76,83,85,88,92,93,95,96,98,99,100,103,110,112,114,122,125,128,130,132,134,136,139,140,142,143,146,150,156,160,168,172,173,177,189,199,203,206,209,211,214,218,219,229,236,240,243,246,251,258,261,262,265,269,275,278,281,287,289,291,292,293,295,298,305\}$.

令 $A_1=S_1\cup\{x:-x\in S_1\}$，据定义2得全序集

$(A_1,\prec)=\{1,-1,21,-21,65,-65,66,-66,139,-139,146,-146,160,-160,172,-172,295,-295,9,-9,19,-19,25,-25,28,-28,88,-88,\cdots\}$.

在计算机上用变异的回溯法得到 $G_p[A_1]$ 的长度为2的 S_1 色的链

$1\prec -1\prec 99$,

并且没有更长的 S_1 色的链，故有 $\max\{l_1(a):a\in S_i\}=2$，据引理4得 $[A_1]=3$，据引理3得 $k_1=[G_p(S_1)]=4$.

令 $S_2=S-S_1=\{3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,16,17,18,20,22,24,\cdots\}$，$A_2=S_2\cup\{x:-x\in S_2\}$，据定义2得全序集

$(A_2,\prec)=\{5,-5,82,-82,105,-105,117,-117,187,-187,247,-247,249,-249,283,-283,288,-288,49,-49,68,-68,120,-120,129,-129,154,-154,\cdots\}$.

在计算机上用变异的回溯法求得 $G_p[A_2]$ 的长度为26的 S_2 色的链

$49\prec -120\prec 59\prec 216\prec 245\prec -11\prec 182\prec -231\prec 233\prec -31\prec 170\prec 6\prec -221\prec -201\prec 259\prec -14\prec -190\prec -74\prec 33\prec -158\prec 3\prec -4\prec -57\prec 63\prec 196\prec -264\prec -227$,

并且没有更长的 S_2 色的链，故有 $\max\{l_2(a):a\in S_2\}=26$，据引理4得 $[A_2]=27$，据引理3得 $k_2=[G_p(S_2)]=28$.

据引理1即得 $R(5,29)\geqslant 614$. //

我们在 CPU 为 AMD2400 的计算机上完成上述运算约为 12h.

参考文献：

1 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 2004, DS1 #10: 1～48.

2 苏文龙，罗海鹏，李 乔. 多色经典 Ramsey 数 $R(q,q,\cdots,q)$ 的下界. 中国科学(A辑), 1999, 29(5): 408～413.

3 苏文龙，罗海鹏，李 乔. 经典 Ramsey 数 $R(4,12)$，$R(5,11)$ 和 $R(5,12)$ 的新下界. 科学通报, 1997, 42(22): 2460.

4 罗海鹏，苏文龙，李 乔. 经典 Ramsey 数 $R(6,12)$，$R(6,14)$ 和 $R(6,15)$ 的新下界. 科学通报, 1998, 43(12): 1336～1337.

5 苏文龙，罗海鹏，李 乔. 7个经典 Ramsey 数 $R(k,l)$ 的新下界. 系统科学与数学, 2000, 20(1): 55～57.

6 Su Wenlong, Luo Haipeng, Zhang Zhengyou, et al. New lower bounds of fifteen classical Ramsey numbers. Australasian Journal of Combinatorics, 1999, (19): 91～99.

（下转第209页）

2 Yaodong Cui, Rurong Zhou. Generating optimal cutting patterns for rectangular blanks of a single size. Journal of the Operational Research Society, 2002, 53 (12): 133~134.

3 崔耀东,张春玲,赵 谊.同尺寸矩形毛坯排样的连分数分支定界算法.计算机辅助设计与图形学学报,2004,16(2):252~256.

4 Cui Yaodong. Generating optimal T-shape cutting patterns for circular blanks. Http://authors. elsevier. com/sd/article/s0305054803002089,2003-08-15.

5 Cui Yaodong. Generating optimal T-shape cutting patterns for rectangular blanks. Journal of Engineering Manufacture,2004,218(8):857~866.

6 Cui Yaodong. Generating optimal multi-segment cutting patterns for circular blanks. European Journal of Operational Research. In press. http://authors. elsevier. com/sd/article/S0377221704004242. 2004-09.

7 Cui Yaodong. A cutting stock problem and its solution in the manufacturing industry of large electric generators. Computers & Operations Research. In press. http://authors. elsevier. com/sd/article/S0305054803003666. 2004-01.

8 Beasley J E. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. Journal of the Operational Research Society,1985,36:297~306.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 206 页)

7 Su Wenlong, Luo Haipeng, Shen Yanqiu. New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(5,13)$ and $R(5,14)$. Applied Mathematics Letters, 1999, (12): 121~122.

8 Luo Haipeng, Su Wenlong, Yun-Qiu Shen. New lower bounds of ten classical Ramsey numbers. Australasian Journal of Combinatorics,2001,(24):81~90.

9 Luo Haipeng, Su Wenlong, Li Zhenchong. The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers. Australasian Journal of Combinatorics, 2002,(25):103~116.

10 Su Wenlong, Li Qiao, Luo Haipeng, et al. Lower bounds of Ramsey numbers based on cubic residues. Discrete Mathematics,2002,(250):197~209.

11 Li Guiqing, Su Wenlong, Luo Haipeng. Edge colorings of the complete graph K_{149} and the lower bounds of three Ramsey numbers. Discrete Applied Mathematics, 2003, (126):167~179.

(责任编辑:黎贞崇)