

Cullen 数的完全方幂*

Perfect Powers in Cullen Numbers

马杰¹, 何波²

Ma Jie¹, He Bo²

(1. 西华师范大学数学与信息科学学院, 四川南充 637000; 2. 四川隆昌县响石中学, 四川隆昌 642152)

(1. Dept. of Math. & Comp. Sci., China West Normal Univ., Nanchong, Sichuan, 637000, China; 2. Longchang Xiangshi Middle School, Longchuan, Sichuan, 642152, China)

摘要: 证明 n 为正整数时, Cullen 数 $C_n = n \cdot 2^n + 1$ 中仅有 $C_2 = 9, C_3 = 25$ 可以表示为完全方幂.

关键词: Cullen 数 丢番图方程 完全方幂

中图分类号: O156 文献标识码: A 文章编号: 1002-7378(2005)03-0133-02

Abstract: It is proved that let n be a positive integer, there is only perfect powers 9 or 25 in all Cullen numbers as $C_n = n \cdot 2^n + 1$.

Key words: Cullen numbers, Diophantine equation, perfect power

设 N 为全体正整数的集合. 对于正整数 n , 形如 $n \cdot 2^n + 1$ 的数称为 Cullen 数. 由于 Fermat 数的素因子具有 $k \cdot 2^n + 1$ 的形式, 因此 Cullen 数的基本性质是数论中一个引人关注的课题^[1]. 根据 Fermat 小定理^[2]可知, 若 p 为奇素数, 则 $(p-1) \cdot 2^{p-1} + 1$ 和 $(p-2) \cdot 2^{p-2} + 1$ 均为 p 的倍数, 所以对于较小的 Cullen 数, 合数的密度十分丰富. Wilfrid Keller 证明了^[3]: 当 $n \leq 30000$ 时, 仅有 $n = 141, 4713, 5795, 6611$ 及 18496 使得 $n \cdot 2^n + 1$ 为素数. 从已有的研究可知, cullen 数与数论中的其它内容, 如 Fermat 数, mersenne 数有着非常密切的联系^[4]. 作为 Cullen 数的一个重要性质, 本文找出所有可以表示为完全方幂的 Cullen 数: 9 或 25. 该问题可以归结为方程

$$n \cdot 2^n + 1 = x^m, n > 0, m > 1, x > 0 \quad (1)$$

的求解. 对此, 本文证明

定理 1 方程(1)仅有整数解 $(n, m, x) = (2, 2, 3), (3, 2, 5)$.

证明 设 (n, m, x) 是方程(1)的一组解. 且设 $n = 2^s n_1, s \geq 0, 2 \nmid n_1$.

(I) 若 $2 \mid m$, 此时只须讨论方程

$$z^2 - 1 = n \cdot 2^n, \quad (2)$$

其中, $z = x^{m/2}$.

由于 $2 \nmid z$, 且 $\frac{z+1}{2}, \frac{z-1}{2}$ 有一个为奇数, 于是方程(2)分解为

$$\frac{z \pm 1}{2} = n_1, \frac{z \mp 1}{2} = 2^{n+s-2}, \quad (3)$$

式中消去 z , 得到

$$|n_1 - 2^{n+s-2}| = 1, \quad (4)$$

即 $\log_2(n_1 \pm 1) = 2^s n_1 + s - 2$. 当 $s \geq 2$ 时, $\log_2(n_1 + 1) \leq 4n_1$, 方程(4)没有整数解; 当 $s = 1$ 时, 方程 $\log_2(n_1 \pm 1) = 2n_1 - 1$ 仅有整数解 $n_1 = 1$, 此时给出方程(1)的一组解 $(n, m, x) = (2, 2, 3)$; 当 $s = 0$ 时, 方程 $\log_2(n_1 \pm 1) = n_1 - 2$ 仅有解 $n_1 = 3$ 适合 $2 \nmid n_1$, 此时给出方程(1)的另一组解 $(n, m, x) = (3, 2, 5)$.

(II) 若 $2 \nmid m$. 则 m 存在奇素因子 q , 只须讨论方程

$$z^q - 1 = n \cdot 2^n, \quad (5)$$

其中 $z = x^{m/q}$. 易知 $\gcd(z - 1, \frac{z^q - 1}{z - 1}) = 1$ 或 q , 且

$$2 \nmid \frac{z^q - 1}{z - 1}.$$

(i) 当 $q \nmid n_1$ 时, (5) 式分解为

$$z - 1 = a \cdot 2^{n+s}, \frac{z^q - 1}{z - 1} = b, \gcd(a, b) = 1, n_1 = ab,$$

(6)

由于 $\frac{z^q}{z-1} \geq \frac{z^3-1}{z-1} > z^2$, 故

$$n_1 \geq b = \frac{z^q - 1}{z - 1} \geq \frac{z^3 - 1}{z - 1} > z^2 = (a \cdot 2^{n+s} + 1)^2 > (a \cdot 2^{n+s})^2, \quad (7)$$

两边取对数,得到

$$\log_2 n_1 > 2(\log_2 a + n + s) > 2n \geq 2n_1, \quad (8)$$

由于 $n_1 \geq 2$, (8) 式矛盾.

(ii) 当 $q \nmid n_1$ 时, (5) 式分解为

$$z - 1 = qa \cdot 2^{n+s}, \frac{z^q - 1}{z - 1} = qb, \gcd(a, b) = 1, n_1 = qab, \quad (9)$$

类似于(7)式,有

$$n_1 \geq qb = \frac{z^q - 1}{z - 1} \geq \frac{z^3 - 1}{z - 1} > z^2 = (qa \cdot 2^{n+s} + 1)^2 > (qa \cdot 2^{n+s})^2, \quad (10)$$

得到

$$\log_2 n_1 > 2(\log_2 q + \log_2 a + n + s) > 2n \geq 2n_1, \quad (11)$$

仍可得此时无解. 定理证毕.

参考文献:

- [1] Guy R K. 数论中未解决的问题(第2版)[M]. 张明尧译. 北京:科学出版社,2003. 15-21,100-101.
- [2] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社,1979.
- [3] Wilfrid Keller. Factors of fermat numbers and large primes of the form [J]. Math Comp, 1983, (41): 661-673.
- [4] Ingemar Jnsson. On certain primes of mersenne-type [J]. Nordisk Tidskr Informationsbe-Handling (BIT), 1972, (12):117-118.

(责任编辑:黎贞崇)

本刊投稿要求和注意事项

- 1 来稿可以是纸稿(允许复印稿及打印稿);也可以是电子版文稿(接受方正小样文件、.TXT、.DOC、.WPS文件),但须同时寄交一份纸稿。
- 2 来稿务必论点明确,论据可靠,数据准确,文字精炼。每篇论文(含图、表、公式、参考文献等)一般不超过8000字(研究简报不超过2000字)。来稿必须包括:题名页(中英对照)、题目、工作单位、电子信箱、通信地址(含街道及门牌号)、邮政编码、中文摘要(300字以下)和关键词、中图法分类号、英文摘要(一般不超过1500字符)和英文关键词,正文,致谢(必要时),参考文献,表格和插图及其说明。每部分请从另页开始。
- 3 摘要应具有独立性和自含性。英文摘要需与中文摘要相对应,符合英语语法规则,务请间行打字。
- 4 英文来稿,请附上与之相对应的中文稿(包括题名页,正文,致谢,参考文献,表格和插图及其说明)。
- 5 来稿务必做到清稿、定稿。须书写工整,字迹清楚,用字规范,物理量和单位符合国家标准和国际标准。稿中的外文字母、符号一律用打印字体,必须分清大、小写,正、斜体(学名、量的符号等用斜体,或在其下划一横线表示);上、下角的字母、数码和符号,其位置高低区别应明显可辨;外文缩略词和容易混淆的外文字、符号请在第一次出现时注明。
- 6 来稿中需要附有作者简介,英文一律用打印字体。图稿须用白色光面绘图纸或半透明的硫酸纸清绘,墨线要黑,线条均匀;图中文字、符号要注明清楚,并与正文一致。图稿请附2份,其中一份请不要写上文字和符号。照片请用光面相纸印出,要求清晰、层次分明。图、表、照片应注明序号和插入文内的位置。图、照片大小一般以80mm×50mm或160mm×100mm为宜,单独存放,不要贴入文内。图稿不符合制版要求,编辑部可请人制作,绘图费从稿费中扣除。
- 7 参考文献只需择主要者列入,未公开发表的资料请勿引用。文献序号请按文中出现先后为序编排。书写格式:期刊:“序号作者姓名(不超过3人者全部写出,超过者只写前3名,后加‘等’或‘et al.’。外文姓前名后,名缩写,不加缩写点)。文章题目。期刊名(外文期刊可用标准缩写,不加缩写点),年,卷(期):起止页码。”;如果期刊无卷号,则为“年,(期):起止页码”。专著:序号作者姓名。书名。版次(第一版不写)。出版地:出版单位(国外出版单位可用标准缩写,不加缩写点),出版年。起止页码。
- 8 来稿一式二份;如有必要,本刊编辑部将退请作者修改、补充、抄正后,再送审。
- 9 文责自负。本刊编辑部可以对来稿作文字修改、删节,对内容的修改,应征得作者许可。如作者不允许对内容作修改,务请在来稿中注明。
- 10 来稿请自留底稿,无论刊登与否恕不退稿。本刊编辑部收到稿件,即寄发收稿回执,请作者查收。收到本刊收稿回执后3个月未接到本刊采用通知时,请与编辑部联系或自行处理。双方另有约定者除外。
- 11 自治区、省(部)级以上重大科研项目及攻关项目,国家863计划项目,自然科学基金资助项目,开放实验室研究项目和拟到国际学术会议上宣读的论文优先发表,请作者投稿时注明(含学位),并请写出项目编号。
- 12 切勿一稿多投。来稿不得侵犯他人版权,如有侵权由投稿者负完全责任。
- 13 来稿一经采用,酌收版面费;刊登后,付稿酬(含《中国学术期刊(光盘版)》、中国期刊网及万方数据网等收录的稿酬),并同时赠送本刊当期2本。