# 具分布时滞和扩散的非自治 Holling Ⅲ 捕食系统的周期解与概周期解

# Periodic and Almost Periodic Solutions of Nonautonomous Diffusive Prey-Predator Systems with Distributed Time Delay and Holling Type Ⅲ Functional Response

汪灵枝,姚晓洁,秦发金

Wang Lingzhi,Yao Xiaojie,Qin Fajin

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004)

(Dept. of Math. and Comp. Sci. ,Liuzhou Teachers Coll. ,Liuzhou,Guangxi,545004,China)

**摘要**:研究一类具有分布时滞和 Holling Ⅲ 类功能反应的非自治捕食扩散系统,利用微分不等式和 Liapunov 函数方法,得到该系统一致持久性及存在唯一全局渐近稳定的周期解和概周期解的充分条件.

**关键词**:捕食扩散系统 分布时滞 Holling Ⅲ 类功能反应 周期解 概周期解 全局渐近稳定性

**中图法分类号**:O175 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2005)03-0135-06

**Abstract**: The nonautonomous diffusive prey-predator systems with distributed time delay and Holling type Ⅲ functional response are discussedwith the help of differential inequality and Lyapunov function. We get the sufficient condition that the system has a unique positive periodic solution and positive almost periodic solution which is global asymptotically stable.

**Key words**: prey-predator and diffusion systems, distributed time delay, Holling type Ⅲ functional response, periodic solution, almost periodic solution, global asymptotic stability

种群的持续生存问题一直是生物学和相关学科非常关心的问题. 考虑到季节的影响,有必要考虑种群在周期和概周期变化环境下的发展趋势. 文献[1]利用微分不等式和 Lyapunov 函数方法讨论了 Lotka-Volterra Holling Ⅱ 类功能反应的非自治扩散系统的周期解的存在唯一性. 文献[2]利用微分不等式和 Lyapunov 函数方法讨论了具放养率和 Holling Ⅱ 类功能反应的非自治系统的周期解的存在唯一性. 本文借助文献[1,2]的方法将讨论具有 Holling Ⅲ 类功能反应和存放率的非自治扩散系统(1),(1)式中,$x_1$ 为种群 $X$ 在斑块 Ⅰ 上的密度;$x_2,x_3,x_4$ 分别为种群 $X,Y,Z$ 在斑块 Ⅱ 上的密度,种群 $X$ 可以在斑块 Ⅰ 和 Ⅱ 之间扩散,而 $Y$ 和 $Z$ 被限制在斑块 Ⅱ 内活动,种群 $Y$ 以 $X$ 为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1[r_1(t) - a_{11}(t)x_1 - q_1(t)\int_{-\tau}^{0} k_1(s)x_1(t+s)\mathrm{d}s] + D_1(t)(x_2 - x_1) + h_1(t), \\ \dot{x}_2 = x_2[r_2(t) - a_{22}(t)x_2 - \dfrac{a_{23}(t)x_2x_3}{1+c_1(t)x_2^2} - \dfrac{a_{24}(t)x_2x_4}{1+c_2(t)x_2^2} - q_2(t)\int_{-\tau}^{0} k_2(s)x_2(t+s)\mathrm{d}s] + D_2(t)(x_1 - x_2) + h_2(t), \\ \dot{x}_3 = x_3[r_3(t) + a_{31}(t)\dfrac{e_1(t)x_2^2}{1+c_1(t)x_2^2} - \dfrac{a_{32}(t)x_3x_4}{1+c_3(t)x_3^2} - a_{33}(t)x_3 - q_3(t)\int_{-\tau}^{0} k_3(s)x_3(t+s)\mathrm{d}s], \\ \dot{x}_4 = x_4[r_4(t) + a_{41}(t)\dfrac{e_2(t)x_2^2}{1+c_2(t)x_2^2} + a_{42}(t)\dfrac{e_3(t)x_3^2}{1+c_3(t)x_3^2} - q_4(t)\int_{-\tau}^{0} k_4(s)x_4(t+s)\mathrm{d}s - a_{44}(t)x_4], \end{cases} \quad (1)$$

食,种群 $Z$ 以种群 $X$ 和 $Y$ 为食,$k_i(s)(i=1,2,3,4)$ 是

收稿日期:2005-03-18

作者简介:汪灵枝(1974-),男,广西象州人,讲师,理学学士,主要从事应用数学、启发式算法的研究。

定义在 $[-\tau,0]$ 上的非负分段连续函数，且 $\int_{-\tau}^{0} k_i(s)\mathrm{d}s = 1$；系统(1)中所有系数都为连续非负的正值函数，$D_i(t)(i=1,2)$ 表示种群 $X$ 在2个斑块之间的扩散系数，在本文中始终假设：系统(1)内所有系数都以正常数为上下界的.

为了方便研究，本文要用到下面记号和概念.

对任意连续有界函数 $f(t)$ 定义：

$f^u = \sup\{f(t)\}, f^l = \min\{f(t)\}$,

设 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R_+^4=\{x\in R^4 | x_i \geqslant 0; i=1,2,3,4.\}$，$x>0$ 是指 $x\in \mathrm{Int}R_+^4=\{x\in R^4 | x_i>0\}$ $C^+=C([-\tau,0];R_+^4)$ 表示所有非负连续函数构成的 Banach 空间，其范数为

$\|\varphi\| = \sup_{s\in[-\tau,0]} |\varphi(s)|$，对于 $\varphi\in C^+$.

如果取 $C^+$ 作为系统(1)的初始函数空间，那么容易看出，对于任何 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)\in C^+$ 且 $\varphi(0)>0$，存在 $\alpha\in[-\tau,\alpha]$ 上的唯一解 $x(t,\varphi)$ 在 $t\in[0,\alpha)$ 上保持为正的. 系统(1)这样的解称为正解，在本文中总假定

$$\varphi\in C^+, \varphi(0)>0. \qquad (2)$$

## 1 系统的一致持久性

**定义1** 如果存在一个紧区域 $S\subset R_+^4$，使对系统(1)的每个可以表示成 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))$ 并具有正初值的解存在 $T\geqslant 0$，当 $t\geqslant T$ 时有 $x(t)\in S$，则称系统(1)是一致持久的.

参照文献[1]引理1的证明易得：

**引理1** $R_+^4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_i>0, i=1,2,3,4\}$ 是关于系统(1)的不变集.

**引理2** $K_0=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4) | 0<x_1,x_2 \leqslant M_1, 0<x_3\leqslant M_2, 0<x_4\leqslant M_3\}$ 是系统(1)的一致有界集，

其中，$M_1=\dfrac{r^u+\sqrt{a^l h^u}}{a^l}$；$M_2>M_2^*=\dfrac{r_3^u+\dfrac{a_{31}^u e_1^u}{c_1^l}}{a_{33}^l}$；

$M_3>M_3^*=\dfrac{r_4^u+\dfrac{a_{41}^u e_2^u}{c_2^l}+\dfrac{a_{42}^u e_3^u}{c_3^l}}{a_{44}^l}$；$r^u=\max\{r_1^u,r_2^u\}$；

$a^l=\min\{a_{11}^l,a_{22}^l\}$；$h^u=\max\{h_1^u,h_2^u\}$.

**证明** 令 $V_1(t)=\max\{x_1(t),x_2(t)\}$，由系统(1)的 $\dot{x}_1,\dot{x}_2$ 可得，当 $t\geqslant\tau$ 时有

$$D^+V_1(t)\leqslant V_1(t)(r^u-a^lV_1(t))+h^u,$$

记 $M_1^*=\dfrac{r^u+\sqrt{(r^u)^2+4a^lh^u}}{2a^l}$，显然 $M_1>M_1^*$.

(i) 如果当 $t_0\geqslant\tau$ 时 $V_1(t_0)\leqslant M_1$，则有 $D^+V_1(t)|_{V_1=M_1}<0$，这蕴含当 $t\geqslant\tau$ 时 $V_1(t)\leqslant M_1$.

(ii) 如果 $t_1\geqslant\tau$ 时 $V_1(t_1)\geqslant M_1$，则存在 $\varepsilon>0$，使当 $t\in[t_1,t_1+\varepsilon)$ 时，$V_1(t)>M_1$，令 $-\alpha=-a^lM_1^2+r^uM_1+h^u$，这时有 $D^+V_1(t)\leqslant-\alpha<0$. 这表明 $V_1(t)$ 以速度 $\alpha$ 严格单调递减，于是存在 $T_1>\tau$，当 $t\geqslant T_1$ 时 $V_1(t)\leqslant M_1$，即当 $t\geqslant T_1$ 时，$x_i(t)\leqslant M_1, i=1,2$.

由系统(1)的 $\dot{x}_3,\dot{x}_4$ 可知，当 $t\geqslant T_1$ 得

$$\begin{cases}\dot{x}_3\leqslant \dot{x}_3(r_3^u+\dfrac{a_{31}^ue_1^u}{c_1^l}-a_{33}^lx_3),\\ \text{且 } \dot{x}_3|_{x_3=M_2}\leqslant M_2(r_3^u+\dfrac{a_{31}^ue_1^u}{c_1^l}-a_{33}^lM_2)<0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_4\leqslant x_4(r_4^u+\dfrac{a_{41}^ue_2^u}{c_2^l}+\dfrac{a_{42}^ue_3^u}{c_3^l}-a_{44}^lM_4),\\ \text{且 } x_4|x_4=M_3\leqslant M_3(r_4^u+\dfrac{\alpha_{41}^ue_2^u}{c_2^l}+\dfrac{\alpha_{42}^ue_3^u}{c_3^l}-\\ \quad \alpha_{44}^cM_4)<0,\end{cases}$$

类似于上述讨论可得：存在 $T_2\geqslant T_1+\tau$，使当 $t\geqslant T_2$ 时，$x_3(t)\leqslant M_2, x_4(t)\leqslant M_3$.

从上面的讨论可知，存在 $T_2\geqslant\tau$，使当 $t\geqslant T_2$ 时有 $0<x_i(t)\leqslant M_1(i=1,2), 0<x_3(t)\leqslant M_2, 0<x_4(t)\leqslant M_3$.

**定理1** 若系统(1)满足条件：

$A=r_1^l-q_1^uM_1>0, B=r_2^l-a_{23}^uM_1M_2-a_{24}^uM_1M_3-q_2^uM_1>0$,

$$r_3^l+\frac{a_{31}^le_1^lm_1^2}{1+c_1^um_1^2}-a_{32}^uM_2M_3-q_3^uM_2>0,$$

$$r_4^l+\frac{a_{41}^le_2^lm_1^2}{1+c_2^um_1^2}+\frac{a_{42}^le_3^lm_2^2}{1+c_3^um_2^2}-q_4^uM_3>0,$$

则系统(1)是一致持久的.

**证明** 由引理2知，存在 $T_2\geqslant\tau$，使当 $t\geqslant T_2$ 时有

$0<x_i(t)\leqslant M_1(i=1,2), 0<x_3(t)\leqslant M_2, 0<x_4(t)\leqslant M_3$,

所以不失一般性，假设这个解当 $t\geqslant T_2$ 时满足 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))\in K_0$.

定义 $V_2(t)=\min\{x_1(t),x_2(t)\}$，根据系统(1)的 $\dot{x}_1,\dot{x}_2$ 可知，当 $t\geqslant T_2+\tau$ 有：

若 $V_2(t)=x_1(t)$，则

$D_+V_2(t)=x_1\geqslant x_1(r_1^l-q_1^uM_1-a_{11}^ux_1)+h_1^l=V_2(t)(r_{12}^l-q_1^uM_1-a_{11}^uV_2(t))+h_1^l$；

若 $V_2(t)=x_2(t)$，则

$D_+V_2(t)=x_2(t)\geqslant x_2(r_2^l-a_{22}^ux_2-a_{23}^uM_1M_2-a_{24}^uM_1M_3-q_2^uM_1)+h_2^l=V_2(t)(r_2^l-a_{23}^uM_1M_2-a_{24}^uM_1M_3-q_2^uM_1-a_{22}^uV_2(t))+h_2^l$.

于是 $D_+V_2(t)\geqslant \min\{V_2(r_1^l-q_1^uM_1-a_{11}^uV_2)+h_1^l,V_2(r_2^l-a_{23}^uM_1M_2-a_{24}^uM_1M_3-q_2^uM_1-a_{22}^uV_2)+h_2^l)$.

取 $0<m_1<m_1^*=\min\{\dfrac{A+\sqrt{A^2+4a_{11}^uh_{11}^l}}{2a_{11}^u},\dfrac{B+\sqrt{B^2+4Bh_2^l}}{2a_{22}^u}\}$.

若 $t\geqslant T_2+\tau$ 时,$V_2(t)\geqslant m_1$,则:$D_+V_2(t)|_{V_2=m_1}>0$,这蕴含着当 $t\geqslant T_2+\tau$ 时 $V_2(t)\geqslant m_1$.

若对所有 $t\geqslant T_2+\tau$ 时,有 $0<V_2(t)<m_1$,则:

$$D_+V_2(t)\geqslant \min\{m_1(A-a_{11}^um_1)+h_1^l,m_1(B-a_{22}^um_1)+h_2^l,h_1^l,h_2^l\}>0,$$

这意味着当 $t\to+\infty$ 时,$V_2(t)\to+\infty$,这与对所有 $t\geqslant T_2+\tau$ 时 $0<V_2(t)<m_1$ 矛盾,于是存在 $T_3\geqslant T_2+\tau$ 使当 $t\geqslant T_3$ 时,$V_2(t)\geqslant m_1$,即 $x_1(t)\geqslant m_1$,$x_2(t)\geqslant m_1$.

由系统(1) 的 $\dot{x}_3,\dot{x}_4$ 可知,当 $t\geqslant T_3$ 得

$$\begin{cases}\dot{x}_3\geqslant x_3(r_3^l+\dfrac{a_{31}^le_1^lm_1^2}{1+c_1^um_1^2}-a_{32}^uM_2M_3-q_3^uM_2-a_{33}^ux_3),\\ \text{且 } \dot{x}_3|_{x_3=m_2}\geqslant m_2(r_3^l+\dfrac{a_{31}^le_1^lm_1^2}{1+c_1^um_1^2}-a_{32}^uM_2M_3-q_3^uM_2-a_{33}^um_2)>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_4\geqslant x_4(r_4^l+\dfrac{a_{41}^le_2^lm_1^2}{1+c_2^um_1^2}+\dfrac{a_{42}^le_3^lm_2^2}{1+c_3^um_2^2}-q_4^uM_3-a_{44}^ux_4),\\ \text{且 } \dot{x}_4|_{x_4=m_3}\geqslant m_3(r_4^l+\dfrac{a_{41}^le_2^lm_1^2}{1+c_2^um_1^2}+\dfrac{a_{42}^le_3^lm_2^2}{1+c_3^um_2^2}-q_4^uM_3-a_{44}^um_3)>0,\end{cases}$$

这里 $0<m_2<m_2^*=\dfrac{r_3^l-a_{32}^uM_2M_3-q_3^uM_2}{a_{33}^u}$,$0<m_3<m_3^*=\dfrac{r_4^l+\dfrac{a_{41}^le_2^lm_1^2}{1+c_2^um_1^2}+\dfrac{a_{42}^le_3^lm_2^2}{1+c_3^um_2^2}-q_4^uM_3}{a_{44}^u}$.

类似上面的讨论可得:存在 $T>T_4$,当 $t\geqslant T$ 时,有 $x_3(t)\geqslant m_2$,$x_4(t)\geqslant m_3$.

综上所述,本文证明了:对于系统(1) 满足(2) 式的任何解 $x(t)$,存在 $T>0$,使当 $t\geqslant T$ 时 $x(t)\in S$,即系统(1) 是一致持久的[2,3].

## 2 周期解的存在性与唯一性

把满足 $x(0)>0$ 周期系统(1) 的解记为:$x(t,x_0)=(x_1(t,x_0),x_2(t,x_0),x_3(t,x_0),x_4(t,x_0))$,$x(0,x_0)=x_0\in R_4^+$,$t>0$.

定义 $R_4^+\to R_4^+$ 的 Poincare′ 映射 $\Phi$ 如下:$\Phi(x_0)=X(\omega,x_0)$,$x_0\in R_4^+$.

参照文献[1] 的定理 2 的证明易得:

**定理 2** 如果周期系统(1) 满足定理 1 的条件,则系统(1) 至少存在一个正周期解.

**定义 2** 对于系统(1) 的任两个正解 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))$ 和 $y(t)=(y_1(t),y_2(t),y_3(t),y_4(t))$ 均有 $|x_1(t)-y_1(t)|+|x_2(t)-y_2(t)|+|x_3(t)-y_3(t)|+|x_4(t)-y_4(t)|\to 0$,$(t\to+\infty)$,则称系统(1) 是全局吸引的.

**引理 3**[4] 若非负函数 $f(t)$ 在$[0,+\infty)$ 上可积,且一致连续,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$.

**定理 3** 若 $\omega$- 周期系统(1) 除满足定理 1 的条件外,还满足:

$$A_1=a_{11}^l+\frac{h_1^l}{M_1^2}-\frac{D_2^u}{m_1}-q_1^u>0,$$

$$A_2=a_{22}^l+\frac{h_2^l}{M_1^2}+\frac{a_{23}^lm_2}{(1+c_1^uM_1^2)^2}+\frac{a_{24}^lm_3}{(1+c_2^uM_1^2)^2}-\frac{a_{23}^uc_1^uM_2M_1^2}{(1+c_1^lm_1^2)^2}-\frac{a_{24}^uc_2^uM_3M_1^2}{(1+c_2^lm_1^2)^2}-\frac{D_1^u}{m_1}-\frac{2a_{31}^ue_1^uM_1}{(1+c_1^lm_1^2)^2}-\frac{2a_{41}^ue_2^uM_1}{(1+c_2^lm_1^2)^2}-q_2^u>0,$$

$$A_3=a_{33}^l+\frac{a_{32}^lm_3}{(1+c_3^uM_2^2)^2}-\frac{a_{32}^uc_3^uM_3M_2^2}{(1+c_3^lM_2^2)^2}-\frac{a_{23}^um_1}{1+c_1^lm_1^2}-\frac{2a_{42}^ue_3^uM_2}{(1+c_3^lm_2^2)^2}-q_3^u>0,$$

$$A_4=a_{44}^l-\frac{a_{24}^uM_1}{1+c_2^lM_1^2}-\frac{a_{32}^uM_2}{1+c_3^lm_2^2}-q_4^u>0,$$

则系统(1) 存在唯一一个 $\omega$- 周期正解,且是全局渐近稳定的.

**证明** 根据定理 1 知系统(1) 存在一个周期为 $\omega$ 的正解 $y(t)=(y_1(t),y_2(t),y_3(t),y_4(t))$. 设 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))$ 为系统(1) 的任一正解,由定理 1 知,当 $t\geqslant T$ 时,$x(t),y(t)\in S$.

作 Lyapunov 函数 $V(t)=\sum\limits_{i=1}^4\{|\ln\dfrac{x_i(t)}{y_i(t)}|+q_i^u\displaystyle\int_{-\tau}^0k_i(s)\int_{t+s}^t|x_i(\theta)-y_i(\theta)|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\}$,

则有:

$$D^+(\ln\frac{x_1(t)}{y_1(t)})=-[a_{11}(t)+\frac{h_1(t)}{x_1(t)y_1(t)}](x_1(t)-y_1(t))-q_1(t)\int_{-\tau}^0k_1(s)(x_1(t+s)-y_1(t+s))\mathrm{d}s+\widetilde{D}_1(t),$$

$$D^+(\ln\frac{x_2(t)}{y_2(t)})=-[a_{22}(t)+\frac{h_2(t)}{x_2(t)y_2(t)}-$$

$\frac{a_{23}(t)y_3(t)(c_1(t)x_2(t)y_2(t)-1)}{(1+c_1(t)x_2^2(t))(1+c_1(t)y_2^2(t))}-$

$\frac{a_{24}(t)y_4(t)(c_2(t)x_2(t)y_2(t)-1)}{(1+c_2(t)x_2^2(t))(1+c_2(t)y_2^2(t))}]\times(x_2(t)-$

$y_2(t))-\frac{a_{23}(t)x_2(t)}{1+c_1(t)x_2^2(t)}(x_3(t)-y_3(t))-$

$\frac{a_{24}(t)x_2(t)}{1+c_2(t)x_2^2(t)}(x_4(t)-y_4(t))-$

$q_2(t)\int_{-\tau}^0 k_2(s)(x_2(t+s)-y_2(t+s))\mathrm{d}s+\widetilde{D}_2(t)$,

$D^+(\ln\frac{x_3(t)}{y_3(t)})=[-a_{33}(t)+$

$\frac{a_{32}(t)y_4(t)(c_3(t)x_3(t)y_3(t)-1)}{(1+c_3(t)x_3^2(t))(1+c_3(t)y_3^2(t))}](x_3(t)-$

$y_3(t))+\frac{a_{31}(t)e_1(t)(x_2(t)+y_2(t))}{(1+c_1(t)x_2^2(t))(1+c_1(t)y_2^2(t))}(x_2(t)$

$-y_2(t))-\frac{a_{32}(t)x_3(t)}{1+c_3(t)x_3^2(t)}(x_4(t)-y_4(t))-$

$q_3(t)\int_{-\tau}^0 k_3(s)(x_3(t+s)-y_3(t+s))\mathrm{d}s$,

$D^+(\ln\frac{x_4(t)}{y_4(t)})=-a_{44}(t)(x_4(t)-y_4(t))+$

$\frac{a_{41}(t)e_2(t)(x_2(t)+y_2(t))}{(1+c_2(t)x_2^2(t))(1+c_2(t)y_2^2(t))}(x_2(t)-y_2(t))$

$+\frac{a_{42}(t)e_3(t)(x_3(t)+y_3(t))}{(1+c_3(t)x_3^2(t))(1+c_3(t)y_3^2(t))}(x_3(t)-$

$y_3(t))-q_4(t)\int_{-\tau}^0 k_4(s)(x_4(t+s)-y_4(t+s))\mathrm{d}s$,

其中,

$$\widetilde{D}_1(t)=\begin{cases}D_1(t)(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}-\frac{y_2(t)}{y_1(t)}),x_1(t)>y_1(t),\\ D_1(t)(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}-\frac{x_2(t)}{x_1(t)}),x_1(t)<y_1(t),\end{cases}$$

$$\widetilde{D}_2(t)=\begin{cases}D_2(t)(\frac{x_1(t)}{x_2(t)}-\frac{y_1(t)}{y_2(t)}),y_2(t)>x_2(t),\\ D_2(t)(\frac{y_1(t)}{y_2(t)}-\frac{x_1(t)}{x_2(t)}),y_1(t)<x_2(t),\end{cases}$$

易证当 $t\geqslant T$ 时:$\begin{cases}\widetilde{D}_1(t)\leqslant\frac{D_1(t)}{m_1}|x_2(t)-y_2(t)|,\\ \widetilde{D}_2(t)\leqslant\frac{D_2(t)}{m_1}|x_1(t)-y_1(t)|,\end{cases}$

从而得

$D^+|\ln\frac{x_1(t)}{y_2(t)}|\leqslant-(a_{11}^l+\frac{h_1^l}{M_1^2})|x_1(t)-y_1(t)|+$

$\frac{D_1^u}{m_1}|x_2(t)-y_2(t)|+q_1^u\int_{-\tau}^0 k_1(s)|x_1(t+s)-$

$y_1(t+s)|\mathrm{d}s$,

$D^+|\ln\frac{x_2(t)}{y_2(t)}|\leqslant-[a_{22}^l+\frac{h_2^l}{M_1^2}+\frac{a_{23}^l m_2}{(1+c_1^u M_1^2)^2}+$

$\frac{a_{24}^l m_3}{(1+c_2^u M_1^2)^2}-\frac{a_{23}^u c_1^u M_2 M_1^2}{(1+c_1^l m_1^2)^2}-\frac{a_{24}^u c_2^u M_3 M_1^2}{(1+c_2^l m_1^2)^2}]|x_2(t)$

$-y_2(t)|+\frac{D_2^u}{m_1}|x_1(t)-y_1(t)|+\frac{a_{23}^u M_1}{1+c_1^l m_1^2}|x_3(t)-$

$y_3(t)|+\frac{a_{24}^u M_1}{1+c_2^l m_1^2}|x_4(t)-y_4(t)|+$

$q_1^u\int_{-\tau}^0 k_1(s)|x_1(t+s)-y_1(t+s)|\mathrm{d}s$,

$D^+|\ln\frac{x_3(t)}{y_3(t)}|\leqslant-[a_{33}^l+\frac{a_{32}^l m_3}{(1+c_3^u M_2^2)^2}-$

$\frac{a_{32}^u c_3^u M_3 M_2^2}{(1+c_3^l m_2^2)^2}]|x_3(t)-y_3(t)|+\frac{2a_{31}^u e_1^u M_1}{(1+c_1^l m_1^2)^2}|x_2(t)$

$-y_2(t)|+\frac{a_{32}^u M_2}{1+c_3^l m_2^2}|x_4(t)-y_4(t)|+$

$q_3^u\int_{-\tau}^0 k_3(s)|x_3(t+s)-y_3(t+s)|\mathrm{d}s$,

$D^+|\ln\frac{x_4(t)}{y_4(t)}|\leqslant-a_{44}^l|x_4(t)-y_4(t)|+$

$\frac{2a_{41}^u e_2^u M_1}{(1+c_2^l m_1^2)^2}|x_2(t)-y_2(t)|+\frac{2a_{42}^u e_3^u M_2}{(1+c_3^l m_2^2)^2}|x_3(t)$

$-y_3(t)|+q_4^u\int_{-\tau}^0 k_4(s)|x_4(t+s)-y_4(t+s)|\mathrm{d}s$,

于是有

$D^+V(t)\leqslant-(a_{11}^l+\frac{h_1^l}{M_1^2}-\frac{D_2^u}{m_1}-q_1^u)|x_1(t)-$

$y_1(t)|-[a_{22}^l+\frac{h_2^l}{M_1^2}+\frac{a_{23}^l m_2}{(1+c_1^u M_1^2)^2}+\frac{a_{24}^l m_3}{(1+c_2^u M_1^2)^2}$

$-\frac{a_{23}^u c_1^u M_2 M_1^2}{(1+c_1^l m_1^2)^2}-\frac{a_{24}^u c_2^u M_3 M_1^2}{(1+c_2^l m_1^2)^2}-\frac{D_1^u}{m_1}-\frac{2a_{31}^u e_1^u M_1}{(1+c_1^l m_1^2)^2}$

$-\frac{2a_{41}^u e_2^u M_1}{(1+c_2^l m_1^2)^2}-q_2^u]|x_2(t)-y_2(t)|-[a_{33}^l+$

$\frac{a_{32}^l m_3}{(1+c_3^u M_2^2)^2}-\frac{a_{32}^u c_3^u M_3 M_2^2}{(1+c_3^l m_2^2)^2}-\frac{a_{23}^u M_1}{1+c_1^l m_1^2}-$

$\frac{2a_{42}^u e_3^u M_2}{(1+c_3^l m_2^2)^2}-q_3^u]|x_3(t)-y_3(t)|-(a_{44}^l-$

$\frac{a_{24}^u M_1}{1+c_2^1 m_1^2}-\frac{a_{32}^u M_2}{1+c_3^l m_2^2}-q_4^u)|x_4(t)-y_4(t)|$,

记 $\beta=\min\{A_1,A_2,A_3,A_4\}>0$,则 $D^+V(t)\leqslant$

$-\beta\sum_{i=1}^4|x_i(t)-y_i(t)|,(t\geqslant T)$.

于是有 $V(t)+\beta\int_T^t\sum_{i=1}^4|x_i(s)-y_i(s)|\mathrm{d}s\leqslant$ $V(T)<+\infty$, $(t\geqslant T)$, 从而 $\int_T^{+\infty}\sum_{i=1}^4|x_i(s)-y_i(s)|\mathrm{d}s<+\infty$.

由定理1及系统(1)可知 $|x_i(t)-y_i(t)|(i=1,2,3,4)$ 和它们的导数都在 $[0,+\infty)$ 有界,从而 $\sum_{i=1}^4|x_i(s)-y_i(s)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续,于是由引理3得到 $\sum_{i=1}^4|x_i(s)-y_i(s)|\to 0(t\to+\infty)$,也即 $\lim_{t\to+\infty}|x_i(t)-y_i(t)|=0,i=1,2,3,4$. 故 $y(t)$ 是唯

一全局吸引的 $\omega$- 周期正解，即系统(1) 的正周期解是唯一且是全局渐近稳定的[3,5].

## 3 概周期解的存在唯一性

**定义 3** 系统(1) 的右端关于 $t$ 是一致概周期的，则称系统(1) 是概周期系统.

下面对概周期系统(1) 进行研究，首先考虑泛函微分方程：

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{3}$$

及乘积系统 $\dot{x}(t) = f(t, x_t), y(t) = f(t, y_t)$，这里 $f: R \times C \to R^n$ 连续，$C = C([-\tau, 0), R^n)$，对于 $\phi \in C$，定义范数 $\|\phi\| = \sup\limits_{s \in [-\tau, 0]} |\phi(s)|$，其中 $|\cdot|$ 为 $R^n$ 中的范数，令 $C_{H^*} = \{\phi \in C \mid \|\phi\| < H^*\}$，$S_{H^*} = \{x \in R^n \mid |x| < H^*\}$.

再假设 $f: R \times C_{H^*} \to R^n$，对任意 $\phi \in C_{H^*}$ 关于 $t$ 是一致概周期的，则有：

**引理 4**[6] 若存在连续函数 $V: R^+ \times S_{H^*} \times S_{H^*} \to R^+$，满足如下条件：

(Ⅰ) $a(|x-y|) \leqslant V(t, x, y) \leqslant b(|x-y|)$，其中 $a(r)$ 是 $b(r)$ 连续、递增的正定函数；

(Ⅱ) $|V(t, x_1, y_1) - V(t, x_2, y_2)| \leqslant k(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$，其中常数 $k > 0$；

(Ⅲ) 存在连续不减函数 $p(s)$：$p(s) > s$，当 $s > 0$ 时使得当 $p(V(t, x_1(t), x_2(t))) > V(t+\theta, x_1(t+\theta), x_2(t+\theta))$，$\theta \in [-\tau, 0]$ 时有

$D^+ V(t, x_1(t), x_2(t)) \leqslant -cV(t, x_1(t), x_2(t))$，$c > 0$ 为常数.

如果系统(3) 存在一个解 $\eta(t)$：$\|\eta(t)\| \leqslant H < H^*$，$t \geqslant t_0$ 时，那么系统(3) 必存在一个一致渐近稳定的概周期解 $p(t)$，且 $\operatorname{mod}(p) \subset \operatorname{mod}(f)$. 进一步，若 $f(t, \phi)$ 关于 $t$ 是 $\omega$- 周期的，则系统(3) 存在一个 $\omega$- 周期解.

下面对系统(1) 作变换 $x_i^*(t) = \ln x_i(t)$，$i = 1, 2, 3, 4$.

则系统(1) 可化为等价系统(1)$^*$，由定理 1 及系统(1) 与(1)$^*$ 的关系，得到：

**引理 5** 若定理 1 的条件满足，则集合 $S^* = \{(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \mid \ln m_1 \leqslant x_i^* \leqslant \ln M_1, i = 1, 2; \ln m_2 \leqslant x_3^* \leqslant \ln M_2; \ln m_3 \leqslant x_4^* \leqslant \ln M_3\}$ 是系统(1)$^*$ 的不变集，且是最终有界集，其中 $m_i, M_i (i = 1, 2, 3)$ 如引理 2 所述.

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = r_1(t) - a_{11}(t)e^{x_1^*(t)} - q_1(t)\displaystyle\int_{-\tau}^{0} k_1(s)e^{x_1^*(t+s)} \cdot \\ \qquad ds + D_1(t)(e^{x_2^*(t) - x_1^*(t)} - 1) + \dfrac{h_1(t)}{e^{x_1^*(t)}}, \\ \dot{x}_2^* = r_2(t) - a_{22}(t)e^{x_2^*(t)} - \dfrac{a_{23}(t)e^{x_2^*(t) + x_3^*(t)}}{1 + c_1(t)e^{2x_2^*(t)}} - \\ \qquad \dfrac{a_{24}(t)e^{x_2^*(t) + x_4^*(t)}}{1 + c_2(t)e^{2x_2^*(t)}} - q_2(t)\displaystyle\int_{-\tau}^{0} k_2(s)e^{x_2^*(t+s)} ds + \\ \qquad D_2(t)(e^{x_1^*(t) - x_1^*(t)} - 1) + \dfrac{h_2(t)}{e^{x_2^*(t)}}, \\ \dot{x}_3^* = r_3(t) + a_{31}(t)\dfrac{e_1(t)e^{2x_2^*(t)}}{1 + c_1(t)e^{2x_2^*(t)}} - \\ \qquad \dfrac{a_{32}(t)e^{x_3^*(t) + x_4^*(t)}}{1 + c_3(t)e^{2x_3^*(t)}} - a_{33}(t)e^{x_3^*(t)} - \\ \qquad q_3(t)\displaystyle\int_{-\tau}^{0} k_3(s)e^{x_3^*(t+s)} ds, \\ \dot{x}_4 = r_4(t) + a_{41}(t)\dfrac{e_2(t)e^{2x_2^*(t)}}{1 + c_2(t)e^{2x_2^*(t)}} + \\ \qquad a_{42}(t)\dfrac{e_3(t)e^{2x_3^*(t)}}{1 + c_3(t)e^{2x_3^*(t)}} - \\ \qquad q_4(t)\displaystyle\int_{-\tau}^{0} k_4(s)e^{x_4^*(t+s)} ds - a_{44}(t)e^{x_4^*(t)}, \end{cases} \tag{1$^*$}$$

**定理 4** 设系统(1) 满足定理 1 的条件及

$$B_1 + \gamma\frac{C}{m_1} > 0, B_2 + \gamma\frac{C}{m_1} > 0, B_3 + \gamma\frac{C}{m_2} > 0,$$

$$B_4 + \gamma\frac{C}{m_3} > 0,$$

其中，$\gamma > 1$ 为常数，$B_1 = a_{11}^l + \dfrac{h_1^l}{M_1^2} - \dfrac{D_2^u}{m_1}$；

$$B_2 = a_{22}^l + \frac{h_2^l}{M_1^2} + \frac{a_{23}^l m_2}{(1 + c_1^u M_1^2)^2} + \frac{a_{24}^l m_3}{(1 + c_2^u M_1^2)^2} - \frac{a_{23}^u c_1^u M_2 M_1^2}{(1 + c_1^l m_1^2)^2} - \frac{a_{23}^u c_2^u M_3 M_1^2}{(1 + c_2^l m_1^2)^2} - \frac{D_1^u}{m_1} - \frac{2a_{31}^u e_1^u M_1}{(1 + c_1^l m_1^2)^2} - \frac{2a_{41}^u e_2^u M_1}{(1 + c_2^l m_1^2)^2};$$

$$B_3 = a_{33}^l + \frac{a_{32}^l m_3}{(1 + c_3^u M_2^2)^2} - \frac{a_{23}^u c_3^u M_3 M_2^2}{(1 + c_3^l m_2^2)^2} - \frac{a_{23}^u M_1}{(1 + c_1^l M_1^2)^2} - \frac{2a_{42}^u e_3^u M_2}{(1 + c_3^l m_2^2)^2};$$

$$B_4 = a_{44}^l - \frac{a_{24}^u M_1}{1 + c_2^l m_1^2} - \frac{a_{32}^u M_2}{1 + c_3^l M_2^2};$$

$$C = q_1^u M_1 + q_2^u M_1 + q_3^u M_2 + q_4^u M_3,$$

则系统(1) 在 $S$ 内存在唯一的正概周期解，它是全局一致渐近稳定的.

**证明** 考虑系统(1) 的乘积系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1[r_1(t) - a_{11}(t)x_1 - q_1(t)\int_{-\tau}^{0} k_1(s)x_1(t+s)\mathrm{d}s] + D_1(t)(x_2 - x_1) + h_1(t), \\ \dot{x}_2 = x_2[r_2(t) - a_{22}(t)x_2 - \dfrac{a_{23}(t)x_2x_3}{1+c_1(t)x_2^2} - \dfrac{a_{24}(t)x_2x_4}{1+c_2(t)x_2^2} - q_2(t)\int_{-\tau}^{0} k_2(s)x_2(t+s)\mathrm{d}s] + D_2(t)(x_1 - x_2) + h_2(t), \\ \dot{x}_3 = x_3[r_3(t) + a_{31}(t)\dfrac{e_1(t)x_2^2}{1+c_1(t)x_2^2} - \dfrac{a_{32}(t)x_3x_4}{1+c_3(t)x_4^2} - a_{33}(t)x_3 - q_3(t)\int_{-\tau}^{0} k_3(s)x_3(t+s)\mathrm{d}s], \\ \dot{x}_4 = x_4[r_4(t) + a_{41}(t)\dfrac{e_2(t)x_2^2}{1+c_2(t)x_2^2} + a_{42}(t)\dfrac{e_3(t)x_3^2}{1+c_3(t)x_3^2} - q_4(t)\int_{-\tau}^{0} k_4(s)x_4(t+s)\mathrm{d}s - a_{44}(t)x_4], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1[r_1(t) - a_{11}(t)y_1 - q_1(t)\int_{-\tau}^{0} k_1(s)y_1(t+s)\mathrm{d}s] + D_1(t)(y_2 - y_1) + h_1(t), \\ \dot{y}_2 = y_2[r_2(t) - a_{22}(t)y_2 - \dfrac{a_{23}(t)y_2y_3}{1+c_1(t)y_2^2} - \dfrac{a_{24}(t)y_2y_4}{1+c_2(t)y_2^2} - q_2(t)\int_{-\tau}^{0} k_2(s)y_2(t+s)\mathrm{d}s] + D_2(t)(y_1 - y_2) + h_2(t), \\ \dot{y}_3 = x_3[r_3(t) + a_{31}(t)\dfrac{e_1(t)y_2^2}{1+c_1(t)y_2^2} - \dfrac{a_{32}(t)y_3y_4}{1+c_3(t)y_4^2} - a_{33}(t)y_3 - q_3(t)\int_{-\tau}^{0} k_3(s)y_3(t+s)\mathrm{d}s], \\ \dot{y}_4 = y_4[r_4(t) + a_{41}(t)\dfrac{e_2(t)y_2^2}{1+c_2(t)y_2^2} + a_{42}(t)\dfrac{e_3(t)y_3^2}{1+c_3(t)y_3^2} - q_4(t)\int_{-\tau}^{0} k_4(s)y_4(t+s)\mathrm{d}s - a_{44}(t)y_4], \end{cases} \tag{4}$$

对于 $X = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in S, Y = (y_1,y_2,y_3,y_4) \in S$，令

$x_i^* = \ln x_i, y_i^* = \ln y_i, i = 1,2,3,4;, X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*), Y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$.

由此可得 $X^* \in S^*, Y^* \in S^*$，要证明系统(1)$^*$的概周期解的存在唯一性，就等价于证明系统(4)的概周期解的存在唯一性. 为此本文定义 Lyapunov 函数 $W(t, X^*(t), Y^*(t)) = \sum_{i=1}^{4} |x_i^*(t) - y_i^*(t)|$，显然 $W(t)$ 满足引理条件(Ⅰ)、(Ⅱ).

设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)), Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))$ 是乘积系统(4)在 $S \times S$ 上的解，由微分中值定理，有

$$|x_i(t) - y_i(t)| = |e^{x_i^*(t)} - e^{y_i^*(t)}| = e^{\xi_i(t)}|x_i^*(t) - y_i^*(t)|, i = 1,2,3,4,$$

其中 $\ln m_1 \leqslant \xi_i(t) \leqslant \ln M_1, i = 1,2; \ln m_2 \leqslant \xi_3(t) \leqslant \ln M_2, \ln m_3 \leqslant \xi_4(t) \leqslant \ln M_3$，于是有

$$m_1|x_i^*(t) - y_i^*(t)| \leqslant |x_i(t) - y_i(t)| \leqslant M_1|x_i^*(t) - y_i^*(t)|, i = 1,2;$$

$$m_2|x_3^*(t) - y_3^*(t)| \leqslant |x_3(t) - y_3(t)| \leqslant M_2|x_3^*(t) - y_3^*(t)|,$$

$$m_3|x_4^*(t) - y_4^*(t)| \leqslant |x_4(t) - y_4(t)| \leqslant M_3|x_4^*(t) - y_4^*(t)|.$$

计算 $W(t)$ 沿系统(4)的解的右上导数(结合定理3的证明过程)得

$$D^+W(t) = \sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\dot{x}_i}{x_i} - \frac{\dot{y}_i}{y_i}\right)\mathrm{sign}(x_i(t) - y_i(t)) \leqslant - \sum_{i=1}^{4}[B_i|x_i(t) - y_i(t)| + q_i^u\int_{-\tau}^{0} k_i(s)|x_i(t+s) - y_i(t+s)|\mathrm{d}s] \leqslant - \sum_{i=1}^{2} B_i m_1|x_i^*(t) - y_i^*(t)| - B_3 m_2|x_3^*(t) - y_3^*(t)| - B_4 m_3|x_4^*(t) - y_4^*(t)| + \sum_{i=1}^{4} q_i^u\int_{-\tau}^{0} k_i(s)|x_i(t+s) - y_i(t+s)|\mathrm{d}s,$$

由已知 $W(t+s, X^*(t+s), Y^*(t+s)) < \gamma W(t, X^*(t), Y^*(t)), s \in [-\tau, 0], \gamma > 1$ 是常数，于是得

$$D^+W(t) \leqslant - \sum_{i=1}^{2}\left(B_1 + \gamma\frac{C}{m_1}\right)m_1|x_i^*(t) - y_i^*(t)| - \left(B_3 + \gamma\frac{C}{m_2}\right)m_2|x_3^*(t) - y_3^*(t)| - \left(B_4 + \gamma\frac{C}{m_3}\right)m_3|x_4^*(t) - y_4^*(t)| \leqslant - \lambda\sum_{i=1}^{4}|x_i^*(t) - y_i^*(t)| = - \lambda W(t, X^*, Y^*),$$

其中 $\lambda = \min\{B_1 + \gamma\frac{C}{m_1}, B_2 + \gamma\frac{C}{m_1}, B_3 + \gamma\frac{C}{m_2}, B_4 + \gamma\frac{C}{m_3}\} > 0$.

(下转第143页)

表 3 中的 $K_T$、$K_D$、$K_O$ 值随着时间延长而增大是由于 β-蒎烯的挥发度较大，部分 β-蒎烯被气体带走使浓度减少所致。

## 3 结论

用 β-蒎烯作为参比物和用苯乙烯作为参比物得出的结果十分接近，表明在采用臭氧化竞争法测定单不饱和长链脂肪酸甲酯时，只要竞争参比物选择恰当，其反应速率常数值是可靠的。本实验中，长链脂肪酸甲酯中的 TAE，DAE 和 OAE 以苯乙烯为参比物在乙酸丁酯中的速率常数分别为 $2.082\times10^7 cm^3\cdot mol^{-1}\cdot s^{-1}$、$2.143\times10^7 cm^3\cdot mol^{-1}\cdot s^{-1}$ 和 $2.229\times10^7 cm^3\cdot mol^{-1}\cdot s^{-1}$。

参考文献：


[1] 周永红，李伟光，刘雄民. 气相色谱——质谱法测定蒜头果油中的脂肪酸[J]. 色谱，2001，19(2)：147.

[2] 郭茂道，陈煜明，毕明珠. 一种合成环十五内酯的简易方法[J]. 化学学报，1987，45：1217.

[3] Finlayson B J，Pitts J N，Atkinson R. Low-pressure gas-phase ozone-olefin reaction[J]. J Am Chem Soc，1974，96：5356.

[4] Atkinson R，Bablch D L. Evaluated kinetic and photochemical date for atmospheric chemistry[J]. J Phys Chem Ref Date，1989，18：881.

[5] Atkinson R，Aschmann S. Rate constants for the gas-phase reaction of $O_3$ with selected organics[J]. Int J Chem Kinet，1982，14：13.

[6] 刘雄民，梁红军，李飘英. 松节油及其 α-蒎烯和 β-蒎烯的臭氧化反应[J]. 应用化学，2002，19(7)：711.

[7] 刘雄民，梁红军，李飘英. 三种苯烯烃臭氧化反应的研究[J]. 化学世界，2002，(7)：349.


（责任编辑：韦廷宗　邓大玉）

（上接第 140 页）

即满足引理 4 的条件（Ⅲ）. 综上所述，由引理 4 知系统(1)* 在 $S^*$ 中有一个一致渐近稳定的概周期解 $y^*(t)$. 特别地，若系统(1)* 的右端关于 $t$ 是 $\omega$-周期的，则系统(1)* 在 $S^*$ 中存在一个 $\omega$-周期解.

相应地，系统(1) 在 $S$ 中存在一个一致渐近稳定的概周期解 $y(t)=e^{y^*(t)}$. 若系统(1)的右端关于 $t$ 是 $\omega$-周期的，则系统(1)在 $S$ 中存在一个 $\omega$-周期解. 由于定理 4 的条件蕴含定理 3 的条件，则由定理 3 可知：$y(t)$ 还是全局渐近稳定的，从而也保证了系统(1) 在 $S$ 中的概周期解的唯一性[6~8].

参考文献：


[1] 孟新柱，王学蕾. 具有 Holling Ⅱ 类功能反应且周期系数的非自治捕食扩散系统的持久与全局渐近稳定性[J]. 大学数学，2003，19(1)：14-19.

[2] 罗桂烈. 某类有放养的捕食链非自治系统的周期解[J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2002，(2)：39-41.

[3] 熊友兵，王　克. 一类具时滞生态系统的概周期解[J]. 高校应用数学学报(A 辑)，2003，18(2)：163-170.

[4] Barbal I. System deqation differentielle doscillation[J]. Rev Roumaine Math Pures Appl，1959，(4)：261-270.

[5] 杨　帆，卜昭红，王　克. 食饵有补充具有第三类功能反应捕食系统的周期解与概周期解[J]. 东北师大学报(自然科学版)，2001，33(4)：1-7.

[6] 何崇佑. 概周期解微分方程[M]. 北京：高等教育出版社，1992. 55-63.

[7] Yuan Rong. Existence of almost periodic solution of functional differencial equations[J]. Ann of Diff Eqs，1991，7(2)：234-242.

[8] 罗桂烈. 具时滞的非自治扩散捕食系统的概周期解[J]. 生物数学学报，1998，(1)：32-38.


（责任编辑：黎贞崇）