

基于分离轴理论的有向包围盒重叠测试算法

Algorithm of Overlap Test to Oriented Bounding Boxes Based on Separation Axis Theory

陈尚飞

Chen Shangfei

(广西民族学院计算机与信息科学学院,广西南宁 530006)

(Coll. of Comp. & Info. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:基于分离轴理论,给出有向包围盒(OBB)重叠测试的一个快速算法,讨论了该算法有效测试的几个问题。基于分离轴理论的OBB重叠测试算法能快速计算凸多面体的重叠性,提高了相交测试的实时性。

关键词:重叠测试 分离轴 包围盒 有向包围盒

中图分类号:TP301.6 文献标识码:A 文章编号:1002-7378(2005)03-0196-03

Abstract: The algorithm of superposition test for Oriented Bounding Boxes (OBB) based on the separation axis theory is developed. Some problems about the constructed test method are discussed. The method can be used to compute convex superposition quickly and improves real time in the intersect test.

Key words: overlap test, separation axis, bounding box, oriented bounding boxes

计算机图形学、真实感图形和虚拟现实等领域经常会用到相交与重叠等测试^[1],特别是计算机图形学中的几何模型碰撞检测技术,存在着相交与重叠问题。而对物体对象的这类问题的研究,选择合适的包围体则是非常重要,这样可以将测试的代价最小化。包围盒^[2]是解决这类问题的有效的选择方法,比较典型的包围盒有:沿坐标轴的轴对齐包围盒(Axis-Aligned Bounding Boxes,简称AABB)、包围球(Sphere),沿任意方向包围盒的有向包围盒(Oriented Bounding Box,简称OBB)、固定方向包围盒(Fixed Directions Hulls,简称FDH)和具有广泛意义的K-dop包围盒等类型。而其中的OBB是一种紧密性最好的包围盒,它曾一度成为碰撞检测系统算法的标准。

包围盒的重叠测试主要是确定包围盒是否有重叠,并不要求确定具体的接触位置,也不需要涉及到接触的深度。对于某些包围盒采用距离计算是比较好的重叠测试方法。大多数包围盒采用距离算法来确定包围盒是否重叠,需要采用快速的凸多面体之间距离算法可以完成,但是距离计算属于精确计

算,其代价相对来说较大^[3]。本文给出的算法是一种基于分离轴理论的算法,它通过少量的计算和对结果大小作判断就可以确定包围盒是否重叠。

1 相关定义和理论

1.1 定义^[4]

所谓OBB包围盒指一种给定对象被定义为包含该对象且相对于坐标轴方向任意的最小的正六面体(也可是凸多面体)。图1所示就是一个命名为 F 的OBB对象的示例,也可说它就是一个表面法线两两垂直的长方体,一般它可以用其中中心点 f^c 和3个归一化向量 f^u, f^v, f^w 来描述,向量 f^u, f^v, f^w 用来描述这个正六面体的边方向,这三条边的正半边长分别用 h_u^F, h_v^F, h_w^F 来表示,它们的含义就是指从中心点 f^c 出发分别到3个不同面的距离。

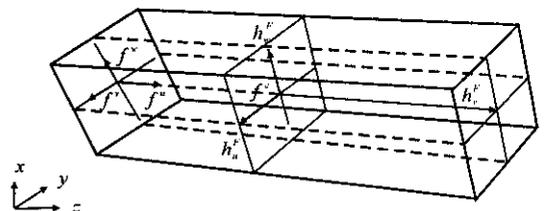


图1 三维的OBB

1.2 分离轴理论^[5]

三维空间中如果存在一个向量,使得被检测的

几何体在该轴上的投影不相交,那么这根轴就是一根分离轴。如果找不到分离轴,那么被检测的几何体相交。如果被检测的几何体是一些简单的几何体,那么它们之间可能潜在的分离轴是可以事先计算出来的。

在重叠的测试过程中,只需测试这里面潜在的分离轴,而不用漫无边际地根据定义去找分离轴,大大减少计算量。

2 OBB 重叠测试算法

本文的测试是在由 E 的中心及相应轴共同组成的坐标系之中进行。根据分离轴理论,就可以找到一条将 E 和 F 分开的轴线,并且可保证 E 和 F 不重叠。这样它们之间的潜在分离轴最多只有 15 根。它们是每个凸多面体的 3 根方向轴,有 $3 \times 2 = 6$ 根。潜在分离轴,一个凸多面体的一条边矢量与另一个凸多面体的边矢量的叉乘,有 $3 \times 3 = 9$ 根潜在分离轴,共有 $9 + 6 = 15$ 根潜在分离轴。二维实例如图 2 所示。

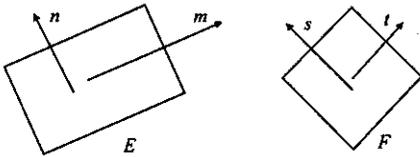


图 2 二维实例

为了判断 OBB 间是否重叠,只需找出一条可以使 E 和 F 投影不重叠的轴线即可。在这里 q 就是一条唯一的能将这两投影分开的轴。由于坐标系是以 E 中心及其相关轴共同组成坐标系,所以这个坐标系的原点是 $e^c = (0, 0, 0)$, 它的 3 个轴分别是 $e^u = (1, 0, 0)$, $e^v = (0, 1, 0)$, $e^w = (0, 0, 1)$, 应该注意到 F 与 E 之间位置关系相差一个位移矩阵 t 和一个旋转矩阵 R 。由于 $V = (e^u \ e^v \ e^w)$ 的正交归一性,与 E 表面正交的可能分离轴是 e^u, e^v, e^w , 对于另一个凸多面体也有相似的情况。把余下的 9 条轴是由它们边矢量组成的叉积,可记为

$$e^{ij} = e^i \times e^j, (\forall i \in \{u, v, w\}, \forall j \in \{u, v, w\}).$$

在图 3 所示的分离轴理论应用示意图中,由于 OBB 包围盒的 3 根方向轴互相垂直,所以可以首先在空中找到一根潜在的分离轴,然后把包围盒的方向矢量向这根分离轴上做投影,比如其中的一条分离轴记为 l 。将 E 和 F 向这条轴线所做的投影,分别记为 l_E, l_F , 则它们的值可以由以下给出:

$$l_E = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^E |e^i \cdot l|,$$

$$l_F = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^F |f^i \cdot l|,$$

仅当有如下结果:

$$|t \cdot l| > l_E + l_F \tag{1}$$

为真时,这两个凸多面体在这条轴线上的投影才彼此分离、不重叠。下面将分 3 个情形分别讨论。

2.1 分离轴 l 为凸面体 E 的其中一根方向轴

为了讨论上的方便,首先令 $l = e^u$, 则有

$$|t \cdot l| = |t \cdot e^u| = |t_x|,$$

而且根据矩阵 $V = (e^u \ e^v \ e^w)$ 的正交归一性可以得到:

$$l_E = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^E |e^i \cdot l| = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^E |e^i \cdot e^u| = h_u^E, \tag{2}$$

同时如果注意到以下的相对旋转矩阵

$$R = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = (f^u \ f^v \ f^w), \tag{3}$$

就可以得到 l_F 以下算式:

$$\begin{aligned} l_F &= \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^F |f^i \cdot l| \\ &= \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^F |f^i \cdot e^u| = h_u^F |f_x^u| + h_v^F |f_x^v| + h_w^F |f_x^w| \\ &= h_u^F |r_{00}| + h_v^F |r_{01}| + h_w^F |r_{02}|, \end{aligned} \tag{4}$$

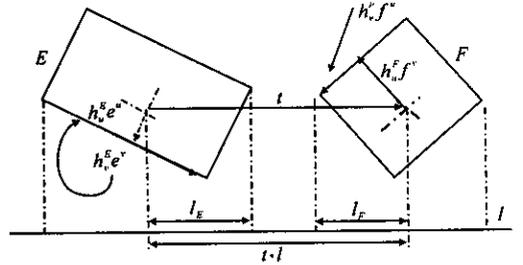


图 3 分离轴理论应用

由此,对于将分离轴看作是凸多面体 E 其中一根方向轴 e^u 的情形,其互相不重叠的测试表达式可以写为:

$$|t_x| > h_u^E + h_u^F |r_{00}| + h_v^F |r_{01}| + h_w^F |r_{02}|,$$

如果此表达式为真,那么凸多面体之间不重叠。

对于分离轴是 E 的另两条方向轴的情形,可以用类似的方法推出其判断表达式。

2.2 分离轴 l 落在凸多面体 F 的一条对称轴上

为了讨论方便,这里令 $l = f^u$, 从而可推出:

$$|t \cdot l| = |t \cdot f^u| = |t_x f_x^u + t_y f_y^u + t_z f_z^u| = |t_x r_{00} + t_y r_{10} + t_z r_{20}|,$$

$$\begin{aligned} l_E &= \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^E |e^i \cdot l| = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^E |e^i \cdot f^u| = h_u^E |f_x^u| \\ &+ h_v^E |f_y^u| + h_w^E |f_z^u| = h_u^E |r_{00}| + h_v^E |r_{10}| + h_w^E |r_{20}|, \end{aligned} \tag{5}$$

$$l_F = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^F |f^i \cdot l| = \sum_{i \in \{u, v, w\}} h_i^F |f^i \cdot f^u| = h_u^F,$$

(6)

在以上的推导过程中,(5)和(6)式中要分别使用到矩阵 V 和旋转矩阵 R 。

根据(5),(6)式以及不重叠判断条件(1),容易得出这种情形的不重叠测试可以写为:

$$|t_x r_{00} + t_y r_{10} + t_z r_{20}| > h_u^E |r_{00}| + h_v^E |r_{10}| + h_w^E |r_{20}| + h_u^F \quad (7)$$

对于另外的2条轴线,可以用和上面类似的方法推导出测试的式子。

2.3 分离轴为2个测试对象的边组合而成

特别地,取 $l = e^u \times f^v$,那么就有

$$|t \cdot l| = |t \cdot (e^u \times f^v)| = |t \cdot (0, -f_z^v, f_y^v)| \\ = |t_x f_y^v - t_y f_z^v| = |t_z r_{11} - t_y r_{21}|, \quad (8)$$

$$l_E = \sum_{i \in \{u,v,w\}} h_i^E |e^i \cdot l| = \sum_{i \in \{u,v,w\}} h_i^E |e^i \cdot (e^u \times f^v)| \\ = \sum_{i \in \{u,v,w\}} h_i^E |f^v \cdot (e^u \times e^i)| = h_v^E |f^v \cdot e^w| + h_w^E |f^v \cdot e^u| \\ = h_v^E |f_z^v| + h_w^E |f_y^v| = h_v^E |r_{21}| + h_w^E |r_{11}|, \quad (9)$$

$$l_F = \sum_{i \in \{u,v,w\}} h_i^F |f^i \cdot l| = \sum_{i \in \{u,v,w\}} h_i^F |f^i \cdot (e^u \times f^v)| = \\ \sum_{i \in \{u,v,w\}} h_i^F |e^u \cdot (f^i \times f^v)| = h_u^F |e^u \cdot f^w| + h_w^F |e^u \cdot f^v| \\ = h_u^F |f_x^w| + h_w^F |f_x^v| = h_u^F |r_{02}| + h_w^F |r_{00}|, \quad (10)$$

因此,对于分离轴 l 是由2个被测试对象的边组合而成的情形,测试结果的表达式可以表示为:

$$|t_z r_{11} - t_y r_{21}| > h_v^E |r_{21}| + h_w^E |r_{11}| + h_u^F |r_{02}| + h_w^E |r_{00}|.$$

对于由 $c^{ij} = e^i \times f^j, \forall i \in \{u,v,w\}, \forall j \in \{u,v,w\}$,所形成的其它轴来说,也可以用类推方法找出它们的测试表达式。

3 有效测试的几个问题

以上算法可以通过C语言编程来实现。为了更好地提高检测的速度,在实验过程中要注意以下几个问题。

(1) 在具体的应用程序操作中在检测之前增加快速排除检测方法,这样很快把目标锁定在很小的

范围内,最后实际参加检测的基本几何元素对会很少,大大提高了碰撞检测速度。

(2) 在程序的测试中共有15个测试,如果其中有一个为正,就可以确定这两个对象不重叠($E \cap F \neq \emptyset$)。

(3) 当2个OBB对象相互重叠的时候($E \cap F \neq \emptyset$),它们需要的操作数量就会最多,但在实际操作中只要找好分离轴,并且保存好每次操作结果,也可取得更快的测试速度。

(4) 采用不同的顺序对分离轴进行测试,会对程序性能有一定的影响。例如,对于以上测试对象来说,先考虑从对象 E 的 e^u, e^v, e^w 轴开始,原因主要是因为它们之间相互正交,能够得到较快的重叠排除测试,然后依次考虑对 F 轴线和由它们两者所组成的轴线的测试。

4 结束语

本文分析了三维空间中的任意两个物体时空的相关性,介绍了一种快速计算凸多面体间是否重叠的测试方法,该方法提高了相交测试的实时性,为三维空间中物体碰撞问题研究和基于物理的运动仿真奠定了基础。

参考文献:

- [1] 孙家广. 计算机图形学[M]. 北京:清华大学出版社, 1984. 1-56.
- [2] 黄文钧,穆玉杰. 新包围盒技术[J]. 广西民族学院学报, 1998, 4(1): 34-35.
- [3] Kay T L, Kajiya J T. Ray tracing complex scenes computer[J]. Graphics, 1986, 20: 214-245.
- [4] 董明晓,郑康平. 一种快速求取空间任意两条曲线交点的算法[J]. 机械设计与制造, 2004, 5(2): 55-56.
- [5] 魏迎梅,王涌,吴泉源,等. 碰撞检测中固定方向凸包围盒的研究[J]. 软件学报, 2001, 12(7): 56-58.

(责任编辑:黎贞崇)