DOI: 10.13657/j.cnki.gxkxyxb.2005.s1.017

基于对称矩阵分解理论的 AR模型参数算法

ARM Parameter Algorithm Based on Symmetrical Matrix Decomposability Theory

廖梦泽,陈海强

Liao Mengze, Chen Haiqiang

(广西大学计算机与电子信息学院,广西南宁 530004)

(School of Comp., Elec. and Info., Guangxi Univ., Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:在分析 AR模型的 Yule-Walker方程和对称矩阵分解理论的基础上,提出基于对称矩阵分解理论的 AM模型算法.该算法研究有关 AR模型阶数 p 的选择,讨论 AR模型的其它求法.仿真结果表明,改进算法的 AR参数能有效提高频谱分辨率、改善方差性能、提高频谱估计的精度.

关键词: AR模型 对称矩阵 功率谱估计 Yule-Walker方程 算法

中图法分类号: TN911.22 文献标识码: A 文章编号: 1002-7378(2005)S0-0050-03

Abstract This paper presents the ARM parameter algorithm based on symmetrical matrix decomposability theory. The algorithm discusses the selection of the ARM rank(p) and some solutions of the ARM. The research shows that new ARM parameter can prove the spectral resolving power. The variance performance and the estimation precision.

Key words AR model, symmetrical matrix, spectral estimation, Yule-Walker equation, algorithm

功率谱估计是信息学科中的研究热点,其研究内容、研究方法不断被更新和改进.现代谱估计方法相对于经典的谱估计方法而言,在谱曲线平滑程度、频谱分辨率等方面都有明显的优势,是谱估计研究的趋势.在现代谱估计参数模型方法中,AR模型、MA模型和 ARMA模型是研究的热点[1].现代谱估计的主要思想是,将广义平稳的过程 $x[n]$表示成一个白噪声过程.本文在研究 AR模型功率谱估计 $x[n]$的自回归基础上,基于文献[2]给出的 AR模型 Yule-Walker方程,提出一种利用对称矩阵分解理论求解 AR模型参数的新方法,并讨论 AR模型参数的其它求法和研究有关 AR模型阶数 p 的选择问题,给出频谱估计和仿真.

1 AR模型的 Yule-Walker方程

AR模型又称为自回归模型[3],它是一个全极点模型,其当前输出是现在输入和过去输入的加权和,可用如下差分方程来表示:

$$X(n) = -\sum_{r=1}^{p} a_r x(n-r) + u(n), \tag{1}$$

其中,$u(n)$ 为白噪声序列;p 为 AR模型的阶数.由上面的方程容易得到 AR模型的转移函数形式:

$$H(z) = \frac{1}{1+\sum_{r=1}^{p} a_d z^{-r}}. \tag{2}$$

进一步可以得到利用 AR模型进行功率谱估计的公式:

$$P_x(k) = \frac{e^2}{\left|1+\sum_{r=1}^{p} a_r W_N^{-kr}\right|^2}, \tag{3}$$

其中,e^2 为白噪声序列的方差[4].由此可以看出,要进行功率谱估计,必需求得 AR模型的参数 a_1, a_2, ..., a_p 及 e^2,根据 Yule-Walker方程,可得:

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_x(0) & \hat{R}_x(1) & \cdots & \hat{R}_x(p) \\ \hat{R}_x(1) & \hat{R}_x(0) & \cdots & \hat{R}_x(p-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{R}_x(p) & \hat{R}_x(p-1) & \cdots & \hat{R}_x(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^2 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

收稿日期: 2005-09-15

作者简介: 廖梦泽(1983-),男,广西桂林人,本科生。

2 对称矩阵的分解

结合矩阵特征值分解和对称矩阵理论研究了现代谱估计方法,与传统的直接对矩阵进行特征值分解算法相比,该求解的算法更加简化,得到的结果具有较好的性能.

先考虑相关矩阵的特征分解:设序列 $x(n)$ 是由 L 个负正弦加白噪声组成,那么其自相关函数为[5]:

$$R_x(k)=\sum_{i=1}^{L}A_i\exp(jw_ik)+e^2W(k), \tag{5}$$

其中,A_i, w_i 分别是第 i 个复正弦的功率及频率;e^2 是白噪声的方差.如果有 $(p+1)$个 $R_x(k)$ 组成相关阵:

$$R_x(k)=$$

$$\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x^*(1) & \cdots & R_x^*(p) \\ R_x(1) & R_x(0) & \cdots & R_x^*(p-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_x(p) & R_x(p-1) & \cdots & R_x(0) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

定义信号向量

$$e=[1,\exp(jw),\ldots\ldots,\exp(jwp)],I=1,2,\ldots,L, \tag{7}$$

则 $$R_{p+1}=\sum_{i=1}^{L}A_ie_ie_i^H+e^2I_{p+1}, \tag{8}$$

令 $$S_{p+1}=\sum_{i=1}^{L}A_ie_ie_i^H. \tag{9}$$

对于矩阵 S_{p+1},可以找到可逆矩阵 C,令 $B=C^TS_{p+1}C$,矩阵 B 称为矩阵 S_{p+1}.因为矩阵 S_{p+1} 为对称矩阵,总有正交矩阵 P 使 $P^{-1}S_{p+1}P=P^TS_{p+1}P=\Lambda$.$\Lambda$ 是以 S_{p+1} 的特征值 λ_i 为对角元素的对角矩阵,P 是特征值 λ_i 对应的特征向量 V_i 组成的正交矩阵.于是,可以根据矩阵 S_{p+1} 求出其特征值和相应的特征向量 L_i,对 L_i 组成的矩阵 C 进行正交化,即可得到正交矩阵 P.

V_i 是对应于特征值 λ_i 的特征向量,且它们之间是相互正交的,即:

$$V_i^HV_i=\begin{cases}1,i=j,\\0,i\neq j.\end{cases} \tag{10}$$

单位阵 I_{p+1} 也可以用特征向量 V_i 表示为:

$$I_{p+1}=\sum_{i=1}^{p+1}V_iV_i^H. \tag{11}$$

可以证明,S_{p+1} 的需最大为 L,若 L 小于 $p+1$,那么 S_{p+1} 将有 $(p+1-L)$ 个零特征值,若将特征值按大小排序,那么 S_{p+1} 的特征值分解可以写为:

$$S_{p+1}=\sum_{i=1}^{L}\lambda_iV_iV_i^H. \tag{12}$$

其中,$V_1,V_2,\ldots,V_L$ 称为主特征向量.

由上面的分析,可得

$$R_{p+1}=\sum_{i=1}^{L}(\lambda_i+e^2)V_iV_i^H+\sum_{i=1}^{p+1}e^2V_iV_i^H. \tag{13}$$

(13) 式为相关阵的特征分解.显而易见,R_{p+1} 和信号矩阵 S_{p+1} 有着相同的特征向量.它们全部的特征向量形成了一个 $p+1$维向量空间,且它们相互正交.进一步说,该向量空间又可分成两个子空间,一个是由特征向量 $V_{L+1},V_{L+2},\ldots,V_{p+1}$ 张成的噪声空间,每个向量的特征值都是 e^2;另一个是由主特征向量 $V_1,V_2,\ldots,V_L$ 张成的信号空间,其特征值分别为 $(e^2+\lambda_1),(e^2+\lambda_2),\ldots,(e^2+\lambda_L)$,$e^2$ 在此反映了噪声对信号空间的影响.

如果舍弃特征向量 $V_{L+1},V_{L+2},\ldots,V_{p+1}$,仅保留信号空间,可以得到相关阵的功率谱估计公式

$$\hat{R}_{p+1}=\sum_{i=1}^{L}(\lambda_i+e^2)V_iV_i^H. \tag{14}$$

基于矩阵 $\hat{R}_{p+1}$ 进行功率谱估计将得到好的谱估计,因为它舍弃了噪声的特征向量 V_{L+1},$V_{L+2},\ldots,V_{p+1}$.另外,可以看到,对称矩阵分解的结果与通常的矩阵特征分解得到的表达式相同,这从另外一方面证明了对称矩阵分解方法的正确性.

3 基于对称矩阵分解理论的 AR模型参数算法

从上面 Yule-Walker方程的系数矩阵可知,方程(4)中的首矩阵是一个对称矩阵,即它的系数矩阵元素关于主对角线对称,根据这一性质,我们可以简化求系数矩阵的逆矩阵,从而简化未知参数 a_1,$a_2,\ldots,a_p$ 的求解.

首先考察矩阵

$$R=\begin{bmatrix} \hat{R}_x(0) & \hat{R}_x(1) & \cdots & \hat{R}_x(p) \\ \hat{R}_x(1) & \hat{R}_x(0) & \cdots & \hat{R}_x(p-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{R}_x(p) & \hat{R}_x(p-1) & \cdots & \hat{R}_x(0) \end{bmatrix}.$$

对于 $P+1$阶矩阵 R,如果存在相似变换矩阵 Q,使得 $Q^{-1}RQ=\Lambda$ 为对角矩阵,就称方阵 R对角化.根据线性代数和矩阵理论可知,N 阶对称矩阵必有正交矩阵 Q,使 $Q^{-1}RQ=\Lambda$,其中 Λ 是以 R 的 $P+1$个特征值为对角元素的对角矩阵,Q是其对角元素对应的特征向量.相反,对于对角矩阵 R 也必存在正交矩阵 Q,使 $R=Q\Lambda Q^{-1}$.同样,Λ 是以 R 的 $P+1$个特征值为对角元素的对角矩阵,Q对应其特征向量.

Yule-Walker方程简单表示为 $R\times a=q$,其中 $a=[1\quad a_1\quad\cdots\quad a_p]^T$,$q=[\varepsilon^2\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T$,则未知参数矩阵 $a=R^{-1}\times q=(Q\Lambda Q^{-1})^{-1}\times q=Q\Lambda^{-1}Q^{-1}\times q$.

因为矩阵 Λ 是对角矩阵,它的逆矩阵 Λ^{-1} 对角线上的元素是矩阵 R 的 $P+1$个特征值的倒数,其它元素为零.这样, ARM的 Yule-Walker方程中,未知参数 $a_1,a_2,\ldots,a_p$ 就全部得到求解,并且在精度上有更好的表现.

4 仿真和频谱估计

考虑一个具有两种频率成分的复合信号:

$$y(x)=5\sin(100\pi x)+2\cos(110\pi x)+\mathrm{randn}(x),$$

对此复合信号 $y(x)$ 的频率成分分析如下: 子信号 $5\sin(100\pi x)$,频率为 $f=50$Hz;子信号 $2\cos(110\pi x)$,频率为 $f=55$Hz;另外,子信号 randn代表的是一个随机噪音发生器.

为了能更清楚地看到上述几个频谱估计方法在分辨率上的差别,本文有意地选择了2个相隔只有 5 Hz的信号,使用 Matlab对这个复合信号的频谱进行仿真和频谱估计,以验证上述理论和方法的正确性.

经典的 AR模型谱估计可以利用 Matlab中 Pyulear函数,它的内核程序基于 Yule-Walker方程来编写,直接将有关参数代入即可.此外, Matlab中有 2个函数是用来实现基于矩阵分解的功率谱估计: Pmusic函数与 Peig函数.由于本文的算法相对于这 2个函数的内核程序来说不完全一样,因此需要以 2个函数为基础,对其中的涉及到矩阵向量反转,特征值对称求解部分程序重新编写和改进,修正后的函数称之为 New_Pmusic函数和 New_Peig函数.以复合信号 $y(x)$ 基础,选择好参数后,得到图 1和图 2的仿真结果.

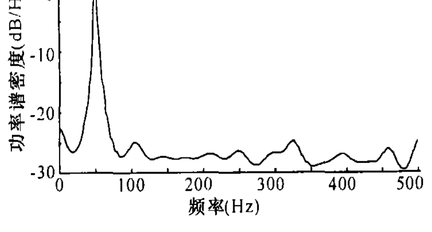

图 1 经典 AR模型算法的功率谱估计

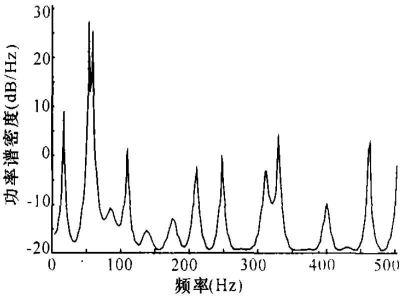

图 2 对称矩阵分解理论算法的功率谱估计

由图 1和图 2可以看出,对相隔仅有 5 Hz的 2个混合信号进行谱估计时,经典的 ARM 估计在 50Hz和 55Hz各有 1个尖峰,不容易看出其频率成份.而图 2应用对称矩阵分解理论算法后,可以明显清晰地看在 50Hz和 55Hz存在 2个尖峰,这是由于新算法提高了参数估计的精度和频率分辨率的缘故.

5 结束语

参数建模谱估计方法是现代谱估计的重要内容, AR模型谱估计隐含着数据和自相关函数的外推,其长度可能超过给定的长度,分辨率不受信源信号长度的限制,这是经典谱估计无法做到的.在 ARM中,利用对称矩阵分解理论求解 AR模型参数是一种新的方法,仿真结果表明,基于对称矩阵分解理论的 AR参数算法能有效提高频谱精度和频谱分辨率,具有重要的理论价值和实际应用意义.

参考文献:

[1] 肖先赐.现代谱估计 [M].哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1991.

[2] 李志华.功率谱估计在微弱信号检测中的应用 [J].大连海事大学学报, 1998, 24(1): 102-104.

[3] Ginnakis G B, Mendel J M. Cumulant-based order determination of non-Gaussian ARMA models [J]. IEEE Trans Acoust, Speech Signal Processing, 1990, 38(4): 1411-1422.

[4] 黄志宇,刘保华,陈高平,等.随机信号的功率谱估计及 Matlab的实现 [J].现代电子技术, 2002, (3): 21-23.

[5] 段沛沛,罗 丰,吴顺君.一种有效的短序列功率谱估计算法及其应用 [J].雷达科学与技术, 2004, 2(6): 373-382.

(责任编辑: 黎贞崇)