局部紧 Lindelöf 空间的序列覆盖映象*

The Sequence-Covering Mappings of Locally Compact Lindelöf Spaces

孔庆钊[1],陈海燕[1],张夏苇[1],平　萍[2]
KONG Qing-zhao[1],CHEN Hai-yan[1],ZHANG Xia-wei[1],PING Ping[2]

(1. 广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004;2. 华东师范大学数学系,上海 200062)
(1. Department of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai,200062,China)

摘要:利用特定的覆盖性质,借助序列覆盖映射,建立局部紧 Lindelöf 空间和 cs 覆盖、sn 覆盖、cs^* 覆盖之间的联系,以及局部紧 Lindelöf 空间的序列覆盖映象特征,得到并深化局部紧 Lindelöf 空间的一些相应结果,完善了局部紧 Lindelöf 空间的映射理论.

关键词:Lindelöf 空间　序列覆盖映射　cs 覆盖　sn 覆盖　cs^* 覆盖　k 系
中图法分类号:O189.1　**文献标识码**:A　**文章编号**:1002-7378(2006)01-0011-03

Abstract: The characteristics of mappings of locally compact Lindelöf spaces are established under some sequence-covering mappings by means of the concepts of cs -covers, sn -covers, cs^* - covers, k system, respectively. Some corresponding results on locally compact Lindelöf spaces are improved.

Key words: Lindelöf spaces, sequence-covering mappings, cs -covers, sn- covers, cs^* -covers, k system

探求拓扑空间映象的内部特征是一般拓扑学研究的重要课题之一. 1964 年 A. V. Arhangel′skii[1]引进 k 系的概念,研究一些具有某种附加性质 k 系的空间与仿紧局部紧空间之间的联系. 1972 年,E. Michael[2]利用开映射、双商映射、可数双商映射、伪开映射和商映射,建立仿紧局部紧空间的映射理论. 1982 年,Y. Tanaka[3]研究仿紧局部紧空间的 k 系结构. 1992 年,我国林寿[4]借助于闭映射、伪开映射和商映射建立仿紧局部紧空间和几类具有某些特定性质 k 系空间之间的联系. 2000 年,李进金[5]利用特定的覆盖性质,建立仿紧局部紧空间地序列覆盖 L- 映象和紧覆盖 L- 映象的特征. 另外,局部紧度量空间的映射理论许多学者也对其进行了研究,1994 年我国李招文[6]研究了局部紧度量空间的商 S- 映象、伪开 S- 映象和闭 S- 映象的特征. 1998 年,李招文等[7]又引进了 mk 系的概念,借助于商映象、伪开映象和闭映象建立局部紧度量空间与几类具有某些特定性质 mk 系空间之间的联系. 但局部紧 Lindelöf 空间的序列覆盖映射理论至今还没有真正建立起来. 受上述工作的启发,本文借助于序列覆盖映射建立局部紧 Lindelöf 空间和 cs 覆盖、sn 覆盖、cs^* 覆盖之间的联系,并由此得到和深化局部紧 Lindelöf 空间的一些相应结果,完善局部紧 Lindelöf 空间的映射理论.

本文约定,所有的空间均指满足 T_1 分离公理的正则空间,所有的映射假设为连续满映射. 对于空间 X 的子集族:$\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$,记 $\bigcup\mathrm{int}(\mathscr{P})=\bigcup\{\mathrm{int}(P_\alpha):\alpha\in\Lambda\}$.

1　相关定义

定义 1　设 $f:X\to Y$ 是映射,

收稿日期:2005-04-15
作者简介:孔庆钊(1978-),男,山东烟台人,硕士研究生,主要从事一般拓扑学研究。
* 广西大学科研基金(199802)资助项目。

(1) f 称为 SL 映射[4]，若对每个 $y \in Y$，存在 y 在 Y 中的开邻域 V，使得 $f^{-1}(V)$ 是 X 的 Lindelöf 子集.

(2) f 称为 1-序列覆盖映射[8]，如果对于 $y \in Y$，存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y，则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$，使得每一个 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(3) f 称为序列覆盖映射[9]，如果 K 是 Y 中含极限点的收敛序列，那么存在 X 中含极限点的收敛序列 L，使得 $f(L) = K$.

(4) f 称为序列商映射[10]，如果对于 Y 中任一收敛序列 S，存在 X 中收敛序列 L，使得 $f(L)$ 是 S 的子序列.

(5) f 称为紧覆盖映射[11]，若 K 是 Y 中的紧子集，则存在 X 中的紧子集 L 使 $f(L) = K$.

由定义 1，显然有下面的蕴含关系：

1-序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列商映射.

定义 2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖，$P \subset X$，

(1) 设 X 中的序列 $x_n \to x$，称 $\{x_n\}$ 终于 P（常在 P），如果存在 $m \in N$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geqslant m\} \subset P$（存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\{x\} \cup \{x_{n_k} : k \in N\} \subset P$）.

(2) P 称为 X 中的点 x 的序列邻域，若 X 中的序列 $x_n \to x$，则 $\{x_n\}$ 终于 P.

(3) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 覆盖（cs^* 覆盖）[12]，若对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x$，存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 终于 P（常在 P）.

(4) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 覆盖[13]，若 $\mathscr{P}$ 中的每一元素都是 X 中某点的序列邻域且对于任一 $x \in X$，存在 x 在 X 中的序列邻域 $P \in \mathscr{P}$.

(5) $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 系[1]，若 $\mathscr{P}$ 中每个元素为 X 中的紧子集，并且任意 $A \in \mathscr{P}$，$A \cap P$ 为 P 中的闭集，则有 A 为 X 中的闭子集.

(6) $\mathscr{K}$ 称为 X 的 k 覆盖[14]，若对于 X 的紧子集 L，存在有限子族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$，使得 $L \subset \bigcup \mathscr{P}'$.

2 主要结果

引理 1 设 M 是局部紧 Lindelöf 空间，则

(1) M 有可数的且局部有限的开覆盖 $\mathscr{R} = \{R_i : i \in N\}$，$\overline{\mathscr{R}} = \{\overline{R}_i : i \in N\}$ 构成空间 M 的可数的且局部有限的 k 系，且满足 $\bigcup \mathrm{int}\,(\overline{\mathscr{R}}) = X$.

(2) 若 $f : M \to X$ 是连续映射，则 $\mathscr{P} = \{f(\overline{R_i}) : i \in N\}$ 是空间 X 的由紧子集组成的覆盖.

证明 (1) 若 M 是局部紧的 Lindelöf 空间，则对 $x \in X$，存在 X 的紧子集 K_x，使得 $x \in \mathrm{int}(K_x)$，又因为正则的 Lindelöf 空间为仿紧空间，所以空间 M 的开覆盖 $\{\mathrm{int}(K_x) : x \in X\}$ 存在局部有限的开加细覆盖 $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$，再由空间 M 的 Lindelöf 性质，$\mathscr{V}$ 存在一个可数的子覆盖 $\mathscr{R} = \{R_i : i \in N\}$，并且对任意 $i \in N$，存在 $x \in X$ 使 $R_i \subset \mathrm{int}(K_x)$，即 $\overline{R_i} \subset K_x$. 因为 K_x 为 M 的紧子集，从而 $\overline{R_i}$ 也为 M 的紧子集，于是 $\overline{\mathscr{R}} = \{\overline{R_i} : i \in N\}$ 是 M 的由紧子集组成的可数且局部有限的覆盖. 又因为对任意的 $i \in N$，有 $R_i \subset \mathrm{int}(\overline{R_i})$，所以有 $\bigcup \mathrm{int}\,(\overline{\mathscr{R}}) = X$.

若 $A \subset M$ 且对任意 $i \in N$，$A \cap \overline{R_i}$ 为 $\overline{R_i}$ 的闭子集，即为 M 的闭子集. 由于 $\overline{R}$ 是 M 的覆盖且是局部有限的，所以有 $A = \overline{\bigcup_{i \in N}(A \cap \overline{R_i})} = \overline{A}$，于是 A 为 M 的闭集.

综上所述，由 k 系的定义可知 $\overline{\mathscr{R}} = \{\overline{R_i} : i \in N\}$ 为空间 X 的可数且局部有限的 k 系，并且 $\bigcup \mathrm{int}\,(\overline{\mathscr{R}}) = X$.

(2) 由连续映射保持紧性显然可得.

引理 2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的由紧子集组成的可数覆盖，令 $M = \bigoplus \mathscr{P}$，$f : X \to Y$ 为自然映射，则

(1) M 是局部紧的 Lindelöf 空间.

(2) f 是可数对一的 SL 映射.

引理 3[5] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖，那么 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 系，当且仅当 X 是 k 空间且 $\mathscr{P}$ 是 X 的由紧子集组成的 k 覆盖.

定理 4 下列条件等价，

(1) X 是局部紧 Lindelöf 空间的紧覆盖、有限对一、闭、SL 映象；

(2) X 是局部紧 Lindelöf 空间；

(3) X 具有 σ-可数且离散 k 系 $\mathscr{F}$，并且满足 $\bigcup \mathrm{int}\,(\mathscr{F}) = X$；

(4) X 具有 σ-可数且局部有限 k 系，$\mathscr{F}$ 并且满足 $\bigcup \mathrm{int}\,(\mathscr{F}) = X$；

(5) X 具有可数且局部有限 k 系；

(6) X 具有可数的点有限且遗传闭包保持 k 系.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 因为有限对一的闭映射为完备映射，而完备映射保持局部紧 Lindelöf 空间，所以 X 为局部紧 Lindelöf 空间.

(2)$\Rightarrow$(3) 若 X 为局部紧 Lindelöf 空间，则由引理 1(1) 可知，X 有可数且局部有限的 k 系 $\mathscr{F}$，并且满足 $\bigcup \mathrm{int}\,(\mathscr{F}) = X$，从而 $\mathscr{F}$ 是 X 的 σ-可数且离散 k 系，满足 $\bigcup \mathrm{int}\,(\mathscr{F}) = X$.

(3)$\Rightarrow$(4) 显然.

(4)⇒(5) 若 X 有 σ- 可数且局部有限 k 系 $\mathscr{K}$,并且满足 $\bigcup \mathrm{int}(\mathscr{K}) = X$,记 $\mathscr{K} = \bigcup \mathscr{K}_i$,每个 $\mathscr{K}_i$ 为 X 的由紧子集组成的可数且局部有限集族,令

$\mathscr{F}_1 = \mathscr{K}_1$,$\mathscr{F}_n = \{K - \bigcup_{i<n}(\bigcup \mathrm{int}(\mathscr{K}_i)) : K \in \mathscr{K}_n\}$,$n \geqslant 2$,

记 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in N} \mathscr{F}_n$,我们可断言 $\mathscr{F}$ 为 X 的可数且局部有限 k 系. 首先由 $\mathscr{F}_n$ 的构造知道,$\mathscr{F}$ 中的每一个元素均为 X 中的紧子集. 其次验证 $\mathscr{F}$ 是可数且局部有限的. 对任意的 $x_0 \in X$,

令 $N' = \{n \in N$,存在 $K \in K_n$,使得 $x_0 \in \mathrm{int}(K)\}$.

取 $n_0 = \min(N')$,所以存在 $K_0 \in \mathscr{K}_{n_0}$,使得 $x_0 \in \mathrm{int}(K_0)$,又因为 $\mathscr{K}_{n_0}$ 为局部有限集族,所以存在 x_0 的一个邻域 $U_{x_0} \subset \mathrm{int}(K_0)$,使得 U_{x_0} 与 $\mathscr{K}_{n_0}$ 中有限个元相交. 由 $\mathscr{F}_n$ 的构造知道,U_{x_0} 与 $\mathscr{F}_{n_0}$ 中有限个元相交. 而当 $n > n_0$ 时,U_{x_0} 与 $\mathscr{F}_n$ 均不相交. 当 $n < n_0$ 时,由于 $\mathscr{K}_n$ 为局部有限集族,所以存在 U_{x_n} 使 U_{x_n} 仅与 $\mathscr{K}_n$ 中有限个元相交,也就是与 $\mathscr{F}_n$ 中的有限个元相交. 令 $V_{x_0} = U_{x_0} \cap (\bigcap_{n<n_0} U_{x_n})$,则 V_{x_0} 仅与 $\mathscr{F}$ 中有限个元相交,从而 $\mathscr{F}$ 可数且局部有限.

又因为 $n_0 = \min(N')$,并且 $x_0 \in \mathrm{int}(K_0)$,所以 $x_0 \in K_0 - \bigcup_{i<n_0}(\bigcup \mathrm{int}(\mathscr{K}_i)) \in \mathscr{F}_{n_0}$. 由 x_0 的任意性,$\mathscr{F}$ 为 X 的覆盖. 再结合引理 1 可得 $\mathscr{F} = \bigcup_{n\in N} \mathscr{F}_n$ 为 X 的可数且局部有限 k 系.

(5)⇒(6) 显然.

(6)⇒(1) 设 $\mathscr{F} = \{F_i : i \in N\}$ 为 X 的可数的点有限且遗传闭包保持 k 系. 由引理 2 可知,X 为局部紧 Lindelöf 空间 M 在 SL 映射 f 下的象,因为 $\mathscr{F}$ 为 X 的点有限且遗传闭包保持 k 系,容易验证 f 为有限对一的闭映射.

再验证 f 为紧覆盖映射. 对于 X 中的紧子集 K,由引理 3 可知 $\mathscr{F}$ 是 X 的 k 覆盖,所以存在有限集族 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$,记作 $\mathscr{F}' = \{F_i : i \leqslant n\}$ 使得 $K \subset \bigcup_{i\leqslant n} F_i$,令 $L = \bigoplus \{K \cap F_i : i \leqslant n\}$,则 L 是 M 中的紧子集,且 $f(L) = K$,于是 f 是紧覆盖映射.

定理 5 下列条件等价,

(1) X 是局部紧 Lindelöf 空间的 1- 序列覆盖、可数对一的 SL 映象;

(2) X 是局部紧 Lindelöf 空间的 1- 序列覆盖映象;

(3) X 具有由紧子集组成的可数的 sn 覆盖.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 设 M 为局部紧 Lindelöf 空间,$f : M \to X$ 为 1- 序列覆盖映射,由引理 1,M 存在可数且局部有限的开覆盖 $\mathscr{R}$ 使得对每一 $R \in \mathscr{R}$,$\overline{R}$ 是 M 的紧子集. 对于 $x \in X$,由于 f 是 1- 序列覆盖映射,存在 $\beta_x \in f^{-1}(x)$ 满足定义的条件. 令 $\mathscr{P}_x = \{f(\overline{R}) : \beta_x \in R \in \mathscr{R}\}$,$\mathscr{P} = \bigcup \{\mathscr{P}_x : x \in X\}$,容易验证 $\mathscr{P}$ 是由 X 的紧子集组成的可数 sn 覆盖.

(3)⇒(1) 只需证明引理 2 中的 f 是 1- 序列覆盖映射. 对于 $x \in X$,$\mathscr{P}$ 是 X 的 sn 覆盖,存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 P 是 x 的序列邻域,取 $x \in f^{-1}(x) \cap P$,对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x \in P$,则 $\{x_n\}$ 终于 P,即存在 $m \in N$,当 $n \geqslant m$ 时有 $x_n \in P$,于是取 $y_n = x_n \in f^{-1}(x_n) \cap P$,则在 M 中 $y_n \to x$,故 f 是 1- 序列覆盖映射.

定理 6 下列条件等价,

(1) X 是局部紧 Lindelöf 空间的序列覆盖、可数对一的 SL 映象;

(2) X 是局部紧 Lindelöf 空间的序列覆盖映象;

(3) X 具有由紧子集组成的可数的 cs 覆盖.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 只需证明引理 1(2) 中的 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 覆盖. 对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x \in X$,由于 f 是序列覆盖映射,存在 $y_n \in f^{-1}(x_n)$,使得在 M 中 $y_n \to y \in f^{-1}(x)$,于是存在 $R \in \mathscr{R}$ 使得 $y \in R$,因 R 是 M 的开集,所以存在 $m \in N$,当 $n \geqslant m$ 时 $y_n \in R \subset \overline{R}$,因此 $\{x_n\}$ 终于 $f(\overline{R}) \in \mathscr{P}$,即 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 覆盖.

(3)⇒(1) 只需证明引理 2 中的 f 是序列覆盖映射. 对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x \in X$,由于 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 覆盖,存在 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 终于 P,即存在 $m \in N$,当 $n \geqslant m$ 时有 $x_n \in P$,于是取 $y_n = x_n \in f^{-1}(x_n) \cap P$,则在 M 中 $y_n \to x \in f^{-1}(x) \cap P$,故 f 是序列覆盖映射.

定理 7 对于下列条件,

(1) X 是局部紧 Lindelöf 空间的序列商、可数对一、SL 映象;

(2) X 是局部紧 Lindelöf 空间的序列商映象;

(3) X 具有由紧子集组成的可数 cs^* 覆盖.

证明 (1)⇒(2) 显然.

(2)⇒(3) 只需证明引理 1(2) 中的 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 覆盖,对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x \in X$,由于 f

(下转第 17 页)

[2] ZHUANG WAJIN. Partial orderings in the category of matrices over the quaternion field [J]. Northeast Mathematial Journal,1995,11(1):9-84.
[3] 庄瓦金.预加法范畴中态射集星型序的刻画[J].数学杂志,1998,18(2):121-124.
[4] 庄瓦金.范畴中态射集星型序的若干研究[J].数学杂志,2004,24(1):105-111.
[5] 庄瓦金.四元数矩阵的加正定权 Moore-Penrose 型广义逆的显公式[J].数学实践与认识,1988,18(3):68-74.
[6] 刘晓冀,王志坚,刘三阳.四元数矩阵的加权广义逆[J].数学实践与认识,2004,34(10):128-131.
[7] 谢邦杰.自共轭四元数矩阵与行列式的展开定理及其应用[J].数学学报,1982,23:668-682.
[8] 谢邦杰.四元数自共轭矩阵与行列式[J].吉林大学学报,1980(25):19-34.
[9] 谢邦杰.四元数矩阵的特征根与表准形式的应用[J].数学学报,1980(23):525-533.
[10] 庄瓦金.四元数矩阵的分解与不等式的推广[J].数学研究与评论,1986(6):24-26.
[11] CHARLES F. VAN LOAN. Generalizeding the singular value decomposition[J]. SIAM J Anal,1976(13):72-81.
[12] 谢邦杰.抽象代数学[M].上海:上海科学技术出版社,1982.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 13 页)

是序列商映射,存在子序列$\{x_{n_i}\}$及$\beta_i \in f^{-1}(x_{n_i})$,使得在 M 中 $\beta_i \to \beta_x \in f^{-1}(x)$.因 $\mathscr{R}$ 是 M 的开覆盖,所以存在 $R \in \mathscr{R}$ 使得$\{\beta_i\}$终于 R,于是$\{x_{n_i}\}$终于 $P = f(\overline{R})$,即 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 覆盖.

(3)⇒(1) 只需证明引理 2 中的 f 是序列商映射.对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x$,记 $S = \{x\} \cup \{x_n : n \in N\}$.由文献[15]中的引理 2.7.4 可知,存在有限子族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 使得 $S \subset \bigcup \mathscr{P}'$.令 $L = \bigoplus \{P \cap S : \mathscr{P} \in \mathscr{P}'\}$,则 L 是 M 的序列紧子集且 $f(L) = S$,于是存在收敛序列 $L' \subset L$ 使得 $f(L')$ 是 S 的子序列,故 f 是序列商映射.

参考文献:

[1] ARHANGEL'SKII A V. On quotient mapping on metric spaces[J]. Dokl Akad Nacck SSSK,1964,155:247-250.
[2] MICHAEL E. A quintuple quotient quest[J]. General Top Appl,1972,2:91-138.
[3] TANAKA Y. Point-countable k-systems and products of k-spaces[J]. Pacific Journal of Mathematical,1982,101(1):199-208.
[4] 林寿.仿紧局部紧空间的映象[J].数学杂志,1992,12:281-286.
[5] LI JINJIN,LI KEDIAN. The Sequence-covering compact images of paracompact locally compact spaces [J]. Northeast Mathematical Journal,2000,16(4):463-468.
[6] LI ZHAOWEN,LIN JINJIN. On Michael-Xugamis problem[J]. Q and A in Goural Topology,1994,12:85-91.
[7] 李招文,李进金.关于局部紧度量空间的映象[J].数学研究与评论,1998,18(1):91-95.
[8] 林寿.关于序列覆盖 S-映射[J].数学进展,1996,25(6):548-551.
[9] SIWIEC F. Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings[J]. General Topics Applied,1971,1:143-154.
[10] BOONE J R,SIWIEC F. Sequentially quotient mappings [J]. Czechoslovak Mathematical Journal,1976,26:174-182.
[11] MICHAEL E A. $\aleph_0$-space[J]. J Math Mech,1966,15(6):983-1002.
[12] IKEDA Y,LIU CHUAN,TANAKA Y. Quotient compant images of metric spaces and reluted matters [J]. Topology Appl,2002,122(3):237-252.
[13] 林寿,燕鹏飞.关于序列覆盖紧映象[J].数学学报,2001,44(1):175-182.
[14] GRUENHAGE G,MICHAEL E,TANAKA Y. Spaces determined by point-countable covers [J]. Pacific Journal of Mathematical,1984,113:303-332.
[15] 林寿.广义度量空间与映射[M].北京:中国科学出版社,1995.

(责任编辑:黎贞崇)