四元数矩阵的加权 * -序 *

The Weighted Star Partial Ordering of Quaternion Matrices

刘晓冀

LIU Xiao-ji

(广西民族大学计算机与信息学院,广西南宁 530006)

(College of Computer and Information Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:定义四元数矩阵的加权 * -序,利用四元数矩阵的加权奇异值分解,给出加权 * -序的一些刻画,讨论任意两个四元数矩阵可以同时加权奇异值分解的充分必要条件,由此得到四元数矩阵的加权 * -序的一些性质.

关键词:矩阵 * -序 加权广义逆 奇异值分解

中图法分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2006)01-0014-04

Abstract: The weighted * -star partial ordering of quaternion matrices is defined, with obtaining of some characterization. A necessary and sufficient condition is obtained for the existence simultaneous weighted singular decomposition of quaternion matrices. Some properties of the weighted * -order are discussed with the help of weighted singular decomposition.

Key words: matrices, * -star partial, weighted inverse, singular decomposition

文献[1]研究复数域上矩阵的 * -序与减序,利用矩阵的奇异值分解,给出 * -序和减序的刻画及一些性质. 文献[2]将其推广到四元数矩阵上,文献[3,4]相继研究范畴中态射集的 * 序的等价刻画和一些性质. 文献[5]给出四元数矩阵的加权 Moore-Penrose 逆的表达式,文献[6]简化了文献[5]的相应结果,回答了其中的 2 个公开问题. 本文由文献[7]的结果给出四元数矩阵的加权奇异值分解,利用四元数矩阵的加权奇异值分解,给出了加权 * -序的一些刻画,同时讨论任意 2 个四元数矩阵可以同时加权奇异值分解的充分必要条件,并由此研究四元数矩阵的加权 * -序的一些性质.

文中设 Q 表示四元数体,$Q^{m\times n}$ 为 Q 上的 $m\times n$ 阶矩阵的集合. δ 是 Q 上的一个给定的对合反自同构,$\delta(a)=\bar{a}$,$\bar{a}$ 为 a 的共轭四元数,$A^*=(\bar{a}_{ij})$ 表示将 A 转置后每个元素由其在 δ 下的象所生成的 $n\times m$ 阶矩阵,若 $A=A^*$,则称 A 为自共轭矩阵. M,N 分别 $m\times m$、$n\times n$ 阶正定自共轭四元数矩阵,I_m 和 $0_{m\times n}$ 分别表示 m 阶四元数单位矩阵和阶四元数零矩阵,在不致引起混淆时,以 I,0 表示.

1 相关定义和引理

定义 1.1 设 $A\in Q^{m\times n}$,M,N 为正定自共轭四元数矩阵,则必有唯一的矩阵 $G\in Q^{n\times m}$,使得:

(1)$AGA=A$;(2)$GAG=G$;(3)$(MAG)^*=MAG$;(4)$(NGA)^*=NGA$,

称 G 为 A 关于 M,N 的加权广义 Moore-Penrose 逆,记为 $A^+_{M,N}$,若 G 满足 $(i)\cdots(j)$ 称为 A 的加权 $(i,\cdots,j)$ 逆,记为 $A^{(i,\cdots,j)}$,所有 $A^{(i,\cdots,j)}$ 的集合记作 $A\{i,\cdots,j\}$.

注意到对于 $A\{i\}$,$A\{i,j\}$,$i,j\in\{1,2\}$ 加权与否没有关系.

定义 1.2 设 M,N 分别为 $m\times m$,$n\times n$ 阶正定自共轭四元数矩阵,则 A 的共轭转置矩阵 $A^{\#}$ 定义为:

$$A^{\#}=N^{-1}A^*M.$$

收稿日期:2005-03-30
修回日期:2005-06-01
作者简介:刘晓冀(1972-),男,江西萍乡人,副教授,博士,主要从事矩阵理论研究。
* 广西科学基金(桂科基 05705032)和广西教育厅项目(桂教科研 47 号 200507126)联合资助。

容易验证 $A^{\#}$ 具有下列性质：

$(AB)^{\#}=B^{\#}A^{\#}$，$(A+B)^{\#}=A^{\#}+B^{\#}$，

$(A^{\#})^{*}=(A^{*})^{\#}$，$(A^{\#})^{\#}=A$.

定义 1.3[2] Q 上矩阵的减序，* - 序分别定义如下：

$A\leqslant B\Leftrightarrow A^{-}A=A^{-}B, AA^{-}=BA^{-}$，

$A\leqslant B\Leftrightarrow A^{*}A=A^{*}B, AA^{*}=BA^{*}$.

谢邦杰[7] 给出正定自共轭四元数矩阵的唯一分解定理，为方便起见，我们直接叙述该定理.

引理 1.1[7] 对 Q 上的任意的自共轭四元数矩阵 A 恒有唯一的广义 $\prod$ 矩阵 L 使得：

$A=LL^{*}$，

其中，广义 $\prod$ 矩阵是指对角线上的元素均为正实数，对角线上方的元素均为零，对角线下方为一般四元数矩阵.

引理 1.2 设 $A\in Q^{m\times n}$，则存在 $U\in Q^{m\times m}$，$V\in Q^{n\times n}$，满足：

$$U^{*}MU=I, V^{*}N^{-1}V=I, \tag{1.1}$$

使得

$$A=U\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^{*}, \tag{1.2}$$

其中 $D=diag(u_1,\cdots,u_r)$，$u_i>0$，u_i 称为 A 的加权奇异值，(1.1) 和 (1.2) 就称为 A 的加权奇异值分解.

证明 由引理 1.1，存在广义 $\prod$ 矩阵 L,K，使得：

$$M=LL^{*}, N=KK^{*},$$

令 $C=L^{*}A(K^{-1})^{*}$，设 C 的奇异值分解为：

$$C=Q\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Z^{*},$$

其中，

$Q^{*}Q=I$，$Z^{*}Z=I$，$D=diag(u_1,\cdots,u_r)$，$u_i>0$，取 $U=(L^{-1})^{*}Q$，$N=KZ$，则有 $U^{*}MU=I$，$V^{*}N^{-1}V=I$，使得

$$A=U\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^{*}.$$

引理 1.3 设 $A\in Q^{m\times n}$，具有加权奇异值分解 (1.1) 和 (1.2)，则：

$$A^{+}_{M,N}=N^{-1}V\begin{pmatrix} D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U^{*}M. \tag{1.3}$$

证明 容易验证 (1.3) 为 A 关于 M,N 的加权广义 Moore-Penrose 逆.

2 主要结果

定义 2.1 若 $A,B\in Q^{m\times n}$，若有 $A^{\#}A=A^{\#}B$，$AA^{\#}=BA^{\#}$，则称 A,B 具有 $\overset{\#}{\leqslant}$ 关系，记为 $A\overset{\#}{\leqslant}B$.

首先，我们不难验证 $\overset{\#}{\leqslant}$ 关系满足自身性、反对称性和传递性，因而为偏序关系，即有：

定理 2.1 $\overset{\#}{\leqslant}$ 关系为一偏序关系，我们称之为加权 * - 序.

定理 2.2 设 $A,B\in Q^{m\times n}$，则以下命题等价：

(1) $A\overset{\#}{\leqslant}B$；

(2) $A^{+}_{M,N}A=A^{+}_{M,N}B$，$AA^{+}_{M,N}=BA^{+}_{M,N}$；

(3) $A^{+}_{M,N}A=B^{+}_{M,N}A$，$AA^{+}_{M,N}=AB^{+}_{M,N}$；

(4) $AA^{+}_{M,N}B=A=BA^{+}_{M,N}A$.

证明 (1)⇒(2) $A^{+}_{M,N}A=A^{+}_{M,N}AA^{+}_{M,N}B=A^{+}_{M,N}B$，同理可证 (2) 的另一等式.

(2)⇒(1) $A^{\#}A=A^{\#}AA^{+}_{M,N}A=A^{\#}AA^{+}_{M,N}B=A^{\#}B$，类似地有 $AA^{\#}=BA^{\#}$，即 (1) 成立.

由 (1)，(2) 的等价性，易证其余命题的等价性.

定理 2.3 设 $A,B\in Q^{m\times n}$，$r(B)\geqslant r(A)\geqslant 1$，则 $A\overset{\#}{\leqslant}B$ 当且仅当存在 $U\in Q^{m\times m}$，$V\in Q^{n\times n}$，满足 $U^{*}MU=I$，$V^{*}N^{-1}V=I$，使得，

$$A=U\begin{pmatrix} D & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}V^{*}, \tag{2.1}$$

$$B=U\begin{pmatrix} D & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}V^{*}, \tag{2.2}$$

其中，D,E 分别为对角矩阵，对角线上的元素为正的实数.

证明 若有 $U\in Q^{m\times m}$，$V\in Q^{n\times n}$，满足 (1.1)，使得 (2.1) 和 (2.2) 成立，则：

$$A^{\#}A=N^{-1}V\begin{pmatrix} D^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}V^{*}=A^{\#}B,$$

类似地有 $AA^{\#}=BA^{\#}$，则 $A\overset{\#}{\leqslant}B$.

反之，由引理 1.2，则有 $U_1\in Q^{m\times m}$，$V_1\in Q^{n\times n}$，满足 $U_1^{*}MU_1=I$，$V_1^{*}N^{-1}V_1=I$ 使得

$$A=U_1\begin{pmatrix} D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V_1^{*},$$

令 $U_1^{*}MBN^{-1}V_1=\begin{pmatrix} B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$，$B_1\in Q^{r\times r}$，将 $B_4\in Q^{r\times r}$ 进行奇异值分解，则有广义酉矩阵 P,T 使得：

$$B_4=P\begin{pmatrix} E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{*},$$

令 $U=U_1\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & P^{*}\end{pmatrix}$，$V=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & T\end{pmatrix}V_1$，则易验证 U,V 满足 (1.1) 且有：

$$A=U\begin{pmatrix}D&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}V^*, \qquad (2.3)$$

$$B=U\begin{pmatrix}B_1&B_5&B_6\\B_7&E&0\\B_8&0&0\end{pmatrix}V^*, \qquad (2.4)$$

由 $A^\# A=A^\# B$,则:

$$\begin{pmatrix}D^2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}DB_1&DB_5&DB_6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

即有 $B_1=D,B_5=0,B_6=0$. 类似地由 $AA^\#=BA^\#\Rightarrow B_7=0,B_8=0$,则有(2.1)和(2.2).

复数域上可以同时奇异值化的矩阵在研究矩阵偏序时起着非常关键的作用,下面我们给出四元数矩阵可以同时加权奇异值化的充要条件,并利用其研究四元数矩阵加权 *-序的一些性质.

定理 2.4 设 $A,B\in Q^{m\times n},a=r(B)\geqslant b=r(A)\geqslant 1$,则 A,B 具有同时加权奇异值分解:

$$A=P\begin{pmatrix}D_1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^*, \qquad (2.5)$$

$$B=PET^*, \qquad (2.6)$$

当且仅当

$$(A^\# B)^\#=A^\# B,(AB^\#)^\#=AB^\#, \qquad (2.7)$$

其中 P,T 满足(1.1),D 为正定对角矩阵,E 为对角矩阵,对角线上的元素为非负实数.

证明 若 A,B 具有同时加权奇异值分解(2.5),(2.6),则易验证(2.7)成立.

反之,由定理2.3,则有 $U\in Q^{m\times m},V\in Q^{n\times n}$,满足(1.1),且有

$$A=U\begin{pmatrix}D&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}V^*,$$

$$B=U\begin{pmatrix}B_1&B_5&B_6\\B_7&E&0\\B_8&0&0\end{pmatrix}V^*,$$

由 $A^\# A=A^\# B$,则

$$\begin{pmatrix}DB_1&DB_5&DB_7\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1^*D&0&0\\B_5^*D&0&0\\B_7^*D&0&0\end{pmatrix},$$

即有 $B_1^*D=DB_1,B_5=0,B_6=0$. $B_1D=DB_1^*,B_7=0,B_8=0$,则 D,B_1 可以同时奇异值化,因而有

$$Z^*DY=D_1,Z^*B_1Y=D_2,$$

令 $P=U\begin{pmatrix}Z^*&0\\0&I\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}Y&0\\0&I\end{pmatrix}V$,

则 A,B 具有同时加权奇异值分解(2.5)和(2.6).

定理 2.5 A,B 具有强同时加权奇异值分解:

$$A=P\begin{pmatrix}D_1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^*, \qquad (2.7)$$

$$B=P\begin{pmatrix}D_1'&0&0\\0&E&0\\0&0&0\end{pmatrix}T^*, \qquad (2.8)$$

当且仅当

$$(A^\# B)^\#=A^\# B,(AB^\#)^\#=AB^\#,r(A,B)=r(B), \qquad (2.9)$$

其中,P,T 满足(1.1),D_1,D_1' 为正定对角矩阵,E 为对角矩阵,对角线上的元素均为非负实数.

证明 必要性显然成立,下面证明充分性.

$$r(A,B)=r(P^*AT,P^*BT)=r(B).$$

由定理2.4的证明,则 B_1 为可逆矩阵,因此有(2.7)和(2.8).

由定理2.5和2.1,易得如下的结论:

定理 2.6 $A\overset{\#}{\leqslant}B\Leftrightarrow A,B$ 强同时奇异值化,且 $\mu(A)\subseteq\mu(B)$,$\mu(A)$ 表示 A 的加权奇异值.

最后,利用加权奇异值分解给出四元数矩阵加权 *-序的一些性质.

定理 2.7 设 $A,B\in Q^{m\times n}$,则

(1)$B=BB^\# B,A\overset{\#}{\leqslant}B\Rightarrow A=AA^\# A$;

(2)$B=BB^\#,A\overset{\#}{\leqslant}B\Rightarrow A=AA^\#$;

(3)$B=B^2,A\overset{\#}{\leqslant}B\Rightarrow A=A^2$.

证明 $B=BB^\# B,A\overset{\#}{\leqslant}B$,有(2.1)和(2.2),则 $D=I$,则结论(1)成立. 同理可证(2),下面证明(3).

令 $U^*MV^{-1}=\begin{pmatrix}T_1&T_2&T_3\\T_4&T_5&T_6\\T_7&T_8&T_9\end{pmatrix}$,

由 $B=B^2$,则有

$$\begin{pmatrix}D&0&0\\0&E&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D^2T_1&D^2T_2&D^2T_5\\E^2T_4&E^2T_5&E^2T_6\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$T_2=0,T_3=0,T_4=0,T_6=0,D^2T_1=D,E^2T_5=E$,则 $A=A^2$. 证毕.

参考文献:

[1] HARTWIG R E,STYAN G P H. On some characterications of the star partial ordering for matrices and rank tractivity[J]. Linear Algebra and Its Application Applied,1986,(82):145-161.

[2] ZHUANG WAJIN. Partial orderings in the category of matrices over the quaternion field [J]. Northeast Mathematial Journal,1995,11(1):9-84.

[3] 庄瓦金. 预加法范畴中态射集星型序的刻画[J]. 数学杂志,1998,18(2):121-124.

[4] 庄瓦金. 范畴中态射集星型序的若干研究[J]. 数学杂志,2004,24(1):105-111.

[5] 庄瓦金. 四元数矩阵的加正定权 Moore-Penrose 型广义逆的显公式[J]. 数学实践与认识,1988,18(3):68-74.

[6] 刘晓冀,王志坚,刘三阳. 四元数矩阵的加权广义逆[J]. 数学实践与认识,2004,34(10):128-131.

[7] 谢邦杰. 自共轭四元数矩阵与行列式的展开定理及其应用[J]. 数学学报,1982,23:668-682.

[8] 谢邦杰. 四元数自共轭矩阵与行列式[J]. 吉林大学学报,1980(25):19-34.

[9] 谢邦杰. 四元数矩阵的特征根与表准形式的应用[J]. 数学学报,1980(23):525-533.

[10] 庄瓦金. 四元数矩阵的分解与不等式的推广[J]. 数学研究与评论,1986(6):24-26.

[11] CHARLES F. VAN LOAN. Generalizeding the singular value decomposition[J]. SIAM J Anal,1976(13):72-81.

[12] 谢邦杰. 抽象代数学[M]. 上海:上海科学技术出版社,1982.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 13 页)

是序列商映射,存在子序列$\{x_{n_i}\}$及$\beta_i \in f^{-1}(x_{n_i})$,使得在 M 中 $\beta_i \to \beta_x \in f^{-1}(x)$. 因 $\mathscr{R}$ 是 M 的开覆盖,所以存在 $R \in \mathscr{R}$ 使得$\{\beta_i\}$终于 R,于是$\{x_{n_i}\}$终于 $P = f(\overline{R})$,即 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^* 覆盖.

(3)⇒(1) 只需证明引理 2 中的 f 是序列商映射. 对于 X 中的收敛序列 $x_n \to x$,记 $S = \{x\} \cup \{x_n : n \in N\}$. 由文献[15]中的引理2.7.4可知,存在有限子族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 使得 $S \subset \bigcup \mathscr{P}'$. 令 $L = \bigoplus \{P \cap S : \mathscr{P} \in \mathscr{P}'\}$,则 L 是 M 的序列紧子集且 $f(L) = S$,于是存在收敛序列 $L' \subset L$ 使得 $f(L')$ 是 S 的子序列,故 f 是序列商映射.

参考文献:

[1] ARHANGEL'SKII A V. On quotient mapping on metric spaces[J]. Dokl Akad Nacck SSSK,1964,155:247-250.

[2] MICHAEL E. A quintuple quotient quest[J]. General Top Appl,1972,2:91-138.

[3] TANAKA Y. Point-countable k-systems and products of k-spaces[J]. Pacific Journal of Mathematical,1982,101(1):199-208.

[4] 林寿. 仿紧局部紧空间的映象[J]. 数学杂志,1992,12:281-286.

[5] LI JINJIN,LI KEDIAN. The Sequence-covering compact images of paracompact locally compact spaces [J]. Northeast Mathematical Journal,2000,16(4):463-468.

[6] LI ZHAOWEN,LIN JINJIN. On Michael-Xugamis problem[J]. Q and A in Goural Topology,1994,12:85-91.

[7] 李招文,李进金. 关于局部紧度量空间的映象[J]. 数学研究与评论,1998,18(1):91-95.

[8] 林寿. 关于序列覆盖 S- 映射[J]. 数学进展,1996,25(6):548-551.

[9] SIWIEC F. Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings[J]. General Topics Applied,1971,1:143-154.

[10] BOONE J R,SIWIEC F. Sequentially quotient mappings [J]. Czechoslovak Mathematical Journal,1976,26:174-182.

[11] MICHAEL E A. $\aleph_0$-space[J]. J Math Mech,1966,15(6):983-1002.

[12] IKEDA Y,LIU CHUAN,TANAKA Y. Quotient compant images of metric spaces and reluted matters [J]. Topology Appl,2002,122(3):237-252.

[13] 林寿,燕鹏飞. 关于序列覆盖紧映象[J]. 数学学报,2001,44(1):175-182.

[14] GRUENHAGE G,MICHAEL E,TANAKA Y. Spaces determined by point-countable covers [J]. Pacific Journal of Mathematical,1984,113:303-332.

[15] 林寿. 广义度量空间与映射[M]. 北京:中国科学出版社,1995.

(责任编辑:黎贞崇)