卷积码的一种代数描述

An Algebraic Description of Convolutional Codes

屈辉立
QU Hui-li

(湖南信息职业技术学院,湖南长沙 410200)
(Hunan Vocational and Technical College of Information,Changsha,Hunan,410200,China)

摘要:模仿线性分组码,从简单的 $(n,1,m)$ 卷积码生成矩阵入手,引入 (n,k,m) 卷积码的生成矩阵.

关键词:卷积码 编码器 矩阵
中图法分类号:TN919;O241.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2006)02-0120-02

Abstract: Introduction in this paper is the (n,k,m) convolutional code generator matrix on the basis of the probe into the general (n,l,m) convolutional code generator matrix by modeling linear block codes.

Key words: convolutional code, encoder, matrix

卷积码编码时,先将信息码分段,每段 k 个码元,然后将这 k 个码元编成码长为 n 的码组,该码组不仅与本段 k 个信息元有关,而且与该码组前面 $(m-1)$ 个信息段有关.由此可见,该码组与 m 个信息段有关,即与 $m\cdot k$ 个信息元有关,那么,$m\cdot k$ 就是该码组以比特为单位的约束长度,而 m 则是以码组个数为单位的约束长度,所以常把卷积码记为 (n,k,m) 卷积码.(n,k,m) 卷积码表示该卷积码长度为 n,信息元为 k,约束长度为 m.

(n,k,m) 卷积码编码器可以看做由一个有 k 个输入端,n 个输出端,且具有 m 节寄存器(或记忆系统)构成的一个有限状态,也可以看成一个有记忆的时序网络[1].

卷积码的描述有用数学公式直接表示的解析法和图形法,解析法有离散卷积法、生成矩阵法、码生成多项式法等;图形法包括状态图(最基本的图形表达形式)、树图及格图(又称为篱笆图)[2].本文模仿线性分组码,从探讨简单的 $(n,1,m)$ 卷积码生成矩阵入手,引入 (n,k,m) 卷积码的生成矩阵.

1 (n,1,m)卷积码的矩阵描述

对于 $(n,1,m)$ 卷积码,其生成矩阵[3]的表达形式为

$$C = A\cdot G =$$

$$(a_1a_2\cdots a_i)\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_m & & & 0 \\ 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_m & & 0 \\ 0 & & g_1 & g_2 & \cdots & g_m & 0 \\ 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & g_1 & g_2 & \cdots & g_m \end{bmatrix},$$

即生成矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_m & & & 0 \\ 0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_m & & 0 \\ 0 & & g_1 & g_2 & \cdots & g_m & 0 \\ 0 & & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & g_1 & g_2 & \cdots & g_m \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式(1)中子矩阵

$$g_1 = [g_1^1 g_1^2 \cdots g_1^n],$$
$$g_2 = [g_2^1 g_2^2 \cdots g_2^n],$$
$$\cdots,$$
$$g_m = [g_m^1 g_m^2 \cdots g_m^n].$$

子矩阵中的各元素可由生成序列得到.

对于图1所示的 $(2,1,3)$ 卷积码编码器,如果输入的信息元序列 $A=(11001)$,由图1可以知道,第 r 组的卷积码与信息元的关系为

收稿日期:2005-11-21
作者简介:屈辉立(1965-),男,主要从事数字通信、交换技术等方面的研究。

$$c_r^1 = a_{r-2} + a_{r-1} + a_r, \tag{2}$$

$$c_r^2 = a_{r-2} + a_r. \tag{3}$$

由式(2)和式(3)得其生成序列

$$G^1 = (g_1^1 g_2^1 g_3^1) = (1\ 1\ 1),$$

$$G^2 = (g_1^2 g_2^2 g_3^2) = (1\ 0\ 1).$$

由此可得，$g_1 = [g_1^1 g_1^2] = [11]$，$g_2 = [g_2^1 g_2^2] = [10]$，$g_3 = [g_3^1 g_3^2] = [11]$.

根据式(1)可得其生成矩阵 G 为

$$G = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 11 & & & & 0 \\ & 11 & 10 & 11 & & & \\ & & 11 & 10 & 11 & & \\ & & & 11 & 10 & 11 & \\ 0 & & & & 11 & 10 & 11 \end{bmatrix},$$

对应的卷积码 C 为

$$C = A \cdot G =$$

$$(11001)\begin{bmatrix} 11 & 10 & 11 & & & & 0 \\ & 11 & 10 & 11 & & & \\ & & 11 & 10 & 11 & & \\ & & & 11 & 10 & 11 & \\ 0 & & & & 11 & 10 & 11 \end{bmatrix} =$$

$(11,01,01,11,11,10,11)$.

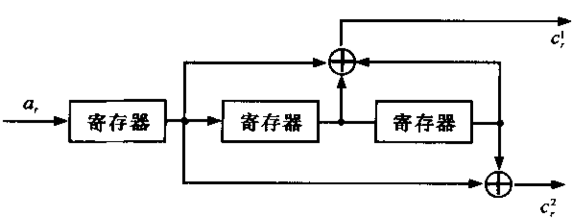

图 1　(2,1,3)卷积码编码器

2　(n,k,m)卷积码的矩阵描述

$(n,1,m)$卷积码只有一路信息元产生卷积码，每位卷积码只有一个生成序列；(n,k,m)卷积码，每组有 k 路信息元决定卷积码，也就是说每位卷积码元都有 k 个生成序列，对应 k 路信息元对该卷积码元的影响. 对第 i 路信息码元(不考虑其它路信息元)，其生成序列为

$$G_i^1 = (g_{i1}^1 g_{i2}^1 \cdots g_{im}^1),$$

$$G_i^2 = (g_{i1}^2 g_{i2}^2 \cdots g_{im}^2),$$

$$\cdots,$$

$$G_i^n = (g_{i1}^n g_{i2}^n \cdots g_{im}^n).$$

对于其它路信息码元，其生成序列依此类推，则其生成矩阵 G 可表示为

$$G = \begin{bmatrix}
g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} & & & \\
g_{(k-1)1} & g_{(k-1)2} & \cdots & g_{(k-1)m} & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} & & & \\
 & g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} & & \\
 & g_{(k-1)1} & g_{(k-1)2} & \cdots & g_{(k-1)m} & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & g_{11} & g_{12} & — & g_{1m} & & \\
 & & g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} & \\
 & & g_{(k-1)1} & g_{(k-1)2} & \cdots & g_{(k-1)m} & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{km} \\
 & & & g_{(k-1)1} & g_{(k-1)2} & \cdots & g_{(k-1)m} \\
 & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & & & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m}
\end{bmatrix}. \tag{4}$$

式(4)中子矩阵

$$g_{km} = [g_{km}^1 g_{km}^2 \cdots g_{km}^n],$$

$$\cdots,$$

$$g_{k1} = [g_{k1}^1 g_{k1}^2 \cdots g_{k1}^n],$$

$$\cdots,$$

$$g_{(k-1)m} = [g_{(k-1)m}^1 g_{(k-1)m}^2 \cdots g_{(k-1)m}^n],$$

$$\cdots$$

子矩阵中的元素可由生成序列获得. 卷积码的生成矩阵表面上看是一个无限矩阵，实际上其矩阵具有重复性，其重复周期就是卷积码的约束长度 $k \cdot m$. 即(n,k,m)卷积码的生成矩阵可以看成如式(5)的一个对角矩阵：

$$G = \begin{bmatrix} G' & & & O \\ & G' & & \\ & & G' & \\ & & & \cdots \\ O & & & G' \end{bmatrix}. \tag{5}$$

对角矩阵的子矩阵 G' 是一个 $k \times (m \cdot n)$ 矩阵，零矩阵 O 是一个 $k \times n$ 矩阵.

对于图 2 所示的(3,2,2)卷积码编码器，如果输入的信息元序列 $A = (110010)$，根据每路信息元与卷积元的关系，得到每路信息元对应的卷积元生

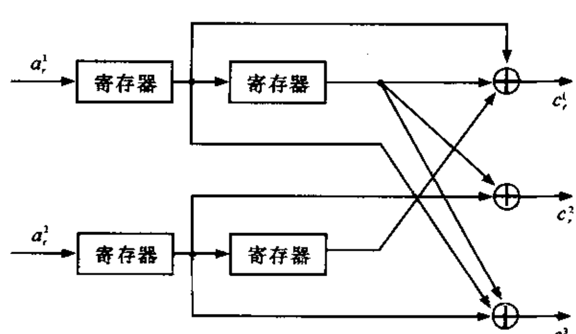

图 2　(3,2,2)卷积码编码器

(下转第 124 页)

1 和 Satellite 2，各携带一枚遥感观测器材。卫星的参数见表 1。

表 1　卫星轨道及遥感器材参数

卫星	轨道高度（km）	轨道倾角（°）	RAAN（°）	最佳分辨率（m）	可视范围（°）	垂直半角（°）	水平半角（°）	可选观测带的数目（个）
Satellite 1	500	50	55	5	±35	5	5	7
Satellite 2	440	80	52	5	±35	5	5	7

要求利用这两颗卫星在 2003-05-01，00：00：00.0～2003-05-02，00：00：00.0 的时限内对表 2 所列的区域目标进行观测，搜索目标区域内的相关情报信息。要求找出满足的优化目标是：(1)最大化空间覆盖率；(2)最大化访问时间。

表 2　目标区域顶点坐标

区域顶点	纬度(°)	经度(°)
1	26	122
2	26	128
3	22	128
4	22	122

利用 matlab 软件编写程序实现贪婪算法对本例的计算结果是：侧摆方案为{－10°，－10°，＋20°，－20°}；目标区域的 94 个点中总共有 68 个点被覆盖到了，空间覆盖率为 72.34%。

4　结束语

本文针对多颗成像侦察卫星对区域目标进行观测的摆角方案优化选择问题，利用先预处理再建模的思路实现了优化建模。在模型求解阶段，利用贪婪算法的思想，设计了相应的贪婪规则最终实现了对问题的优化求解。

参考文献：

[1] 邢文训，谢金星. 现代化计算方法[M]. 北京：清华大学出版社，1999.

[2] HOFFMAN A J. On greedy algorithms that succeed，in surveys in combinatorics [J]. London Mathematical Society Leture Note Series，1985，103：97-112.

[3] 刘艳凯，罗振壁，蒋任重. 采用基于拟阵的贪婪算法优化 RRMS 的布局[J]. 工业工程与管理，2001(2)：9-12.

（责任编辑：邓大玉）

（上接第 121 页）

成序列：

$$G_1^1 = (g_{11}^1 g_{12}^1) = (11),\ G_1^2 = (g_{11}^2 g_{12}^2) = (01),\ G_1^3 = (g_{11}^3 g_{12}^3) = (11);$$

$$G_2^1 = (g_{21}^1 g_{22}^1) = (01),\ G_2^2 = (g_{21}^2 g_{22}^2) = (10),\ G_2^3 = (g_{21}^3 g_{22}^3) = (10).$$

则有

$$g_{11} = [g_{11}^1 g_{11}^2 g_{11}^3] = [101],$$
$$g_{12} = [g_{12}^1 g_{12}^2 g_{12}^3] = [111];$$
$$g_{21} = [g_{21}^1 g_{21}^2 g_{21}^3] = [011],$$
$$g_{22} = [g_{22}^1 g_{22}^2 g_{22}^3] = [100].$$

根据式(4) 得其生成矩阵 G 为：

$$G = \begin{bmatrix} 101 & 111 & & 0 \\ 011 & 100 & & \\ & 101 & 111 & \\ & 011 & 100 & \\ & & 101 & 111 \\ 0 & & 011 & 100 \end{bmatrix},$$

对应的卷积码 C 为：

$$C = A \cdot G =$$

$$(110010)\begin{bmatrix} 101 & 111 & & 0 \\ 011 & 100 & & \\ & 101 & 111 & \\ & 011 & 100 & \\ & & 101 & 111 \\ 0 & & 011 & 100 \end{bmatrix} =$$

$$(110011101111).$$

3　结束语

线性分组码的逻辑译码具有译码快、电路简单的优点[4]，代数描述是逻辑译码的关键一环. 本文模仿线性分组码，从简单的 $(n,1,m)$ 卷积码生成矩阵入手，引入 (n,k,m) 卷积码的生成矩阵，探讨了卷积码的代数描述.

参考文献：

[1] FORNEY JR J D. Concatenated codes[M]. Cambridge，MA：MIT Press，1966.

[2] 吴伟陵，牛凯. 移动通信原理[M]. 北京：电子工业出版社，2005.

[3] 樊昌信，张甫翊，徐炳祥，等. 通信原理[M]. 第 5 版. 北京：国防工业出版社，2001.

[4] PROAKIS J G. 数字通信[M]. 第 4 版. 张力军，张宗橙，郑宝玉，等译. 北京：电子工业出版社，2003.

（责任编辑：邓大玉）