

# 一种改进的小波变换信号消噪方法\*

## An Improved Signal Denoising Method Based on Wavelet Transform

李 杰, 丁宣浩

LI Jie, DING Xuan-hao

(桂林电子工业学院计算科学与数学系, 广西桂林 541004)

(Department of Computing Science and Mathematics, Guilin Institute of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:**根据小波阈值消噪方法的步骤及特点提出一种新的消噪方法——小波系数放大法,并对该方法进行仿真对比实验。该方法在运用小波变换对含噪信号进行消噪前,先对信号进行小波级数分解,对其中的低频系数和低频系数进行适当的放大,然后对信号采取阈值消噪法进行消噪,最后运用小波变换对所得到的的小波系数进行适当的缩小,并将其重构。仿真实验结果表明,小波系数放大法消噪后信号的均方根误差有很大的降低,信噪比提高。该方法优于一般的消噪方法。

**关键词:**小波变换 傅立叶变换 阈值消噪 系数放大

中图分类号:TN911.73 文献标识码:A 文章编号:1002-7378(2006)03-0157-04

**Abstract:** In this method, the coefficients including low and high frequencies of wavelet transform are magnified properly before denoised. The noises of coefficients magnified are removed by using the wavelet threshold. The coefficients denoised are minified aptly and reconstructed by the wavelet transform. In the simulation analysis, the average square root error of the coefficients denoised in this way dropped a lot, and the ratio of signal to noise increased. It is showed that the present method is better than other normal methods.

**Key words:** Wavelet transform, Fourier transform, threshold method denoising, coefficient magnify

传统的消噪方法可认为等价于信号通过一个低通或带通滤波器,利用傅立叶变换把信号映射到频域内加以分析,在去噪的同时,往往也模糊了信号的位置信息,且在实际中常遇到的非平稳信号,其谱特性沿时间轴无限扩展,这样利用傅立叶变换的基函数很难与其匹配。

近年来小波理论得到了非常快速的发展,由于小波变换同时具有时域和频域上的局部特性以及多分辨分析特性,所以特别适合在信号处理中应用。运用小波方法进行信号消噪主要考虑 3 个问题:(1)模型的选择,只有在有效的小波系数模型上才有可能

发展出有效的小波消噪方法;(2)小波基的选择,对应于特定的含噪信号,不同的小波基会产生不同的消噪效果,这是小波方法中的关键问题;(3)阈值的选择,这也是一个重要的问题,阈值选取好坏直接影响消噪后的质量。运用小波阈值法对含噪信号进行消噪是近年来的研究热点,各种阈值的选取方法也层出不穷,1992 年 Donoho 和 Johnstone 提出了小波阈值萎缩法,给出了  $\delta = \sigma \sqrt{2 \log(N)}$  的阈值,对于信号而言, $N$  为信号的长度, $\sigma$  是噪声信号的标准差(用来度量噪声的强弱)<sup>[1~3]</sup>。对于信号处理而言,用阈值法去噪不仅能够几乎完全抑制噪声,而且可很好的地保留反映原始特征的尖峰点,因而具有很好的去噪效果。但在有些情况下,如在信号的不连续点处,运用硬阈值法去噪会产生吉布斯现象,若利用软阈值法处理结果则相对平滑得多,但是有可能造成边缘的模糊等失真现象<sup>[4]</sup>。本文根据小波阈值消

收稿日期:2005-11-15

作者简介:李 杰(1980-),女,山东菏泽人,硕士,主要从事小波研究。

\* 国家自然科学基金(10361003)和广西自然科学基金项目(0542046)联合资助。

噪方法的步骤及特点提出了一种新的消噪方法——小波系数放大法,该方法可以更好的保留信号的细节信息,减少信号的失真。

## 1 信号的小波去噪原理<sup>[4~6]</sup>

### 1.1 信号的噪声模型与小波消噪原理

对含噪信号  $s(n)$  进行消噪的目的就是要抑制信号中的噪声部分,从  $s(n)$  中恢复出真实信号  $f(n)$ 。在实际工程中,有用信号通常表现为低频信号或一些比较平稳的信号,而噪声信号则通常表现为高频信号。所以我们可以先对含噪信号进行小波分解,如进行三层分解:

$$S = cA1 + cD1 = cA2 + cD2 + cD1 = cA3 + cD3 + cD2 + cD1,$$

其中  $cAi$  为分解的近似部分,  $cDi$  为分解的细节部分 ( $i = 1, 2, 3$ ), 则噪声部分通常包含在  $cD1, cD2, cD3$  中, 用门限阈值对小波系数进行处理, 然后再重构信号即可达到消噪的目的。

一般来说, 一维信号的消噪算法可以分三个步骤进行:

(1) 选择小波和小波分解的层次, 然后对信号  $S$  进行  $N$  层小波分解。(2) 高频系数的阈值量化, 对于从第 1 到第  $N$  层的每一层, 选择一个阈值, 并且对高频系数用软阈值进行处理。(3) 根据第  $N$  层的低频系数和从第一层到第  $N$  层的高频系数, 计算出信号的小波重构。在这三个步骤中, 最关键的是如何选取阈值和如何进行阈值的量化处理。从某种程度上说, 它直接关系到信号的消噪质量。

### 1.2 小波变换下信号与噪声的不同特性

根据函数  $f(x)$  的局部奇异性与其小波变换模极大值的渐进衰减性之间的关系, 在二进尺度下, 我们通过各种变换可得到:

$$\log_2 |W_{2^j} f(u)| \leq \log_2 A + \alpha j, 0 \leq \alpha < 1.$$

由此可知, 如果函数  $f(x)$  的 Lipschitz 指数  $\alpha > 0$ , 则该函数的小波变换模极大值将随着尺度的增大而增大; 反之, 若  $\alpha < 0$ , 则函数的小波变换模极大值将随尺度的增大而减小。

信号和噪声在小波变换下的主要不同点有两点: (1) 在小波变换下噪声的平均幅值与尺度因子成反比, 即噪声的能量随尺度的增加而迅速减小, 而小波变换下信号的平均幅值不会随尺度的增加而明显减小; (2) 噪声在不同尺度上的小波变换是高度不相关的, 信号的小波变换一般具有很强的相关性, 相邻尺度上的局部极大值几乎出现在相同的位置

上, 并且有相同的符号。

通过小波变换, 噪声的小波系数均匀分布于整个尺度空间上, 幅度相差不大, 而信号的小波系数主要集中在几条亮线上, 非常集中, 可以考虑将高频系数及低频系数进行不同的放大, 以利于区分出信号与噪声信息。这为小波方法进行信号消噪提供了良好的依据。

## 2 改进的小波阈值去噪方法

在应用域值方法进行信号的消噪处理时, 本文所选取的阈值为  $\delta = k\sigma \sqrt{2\log(N)}$ , 这里  $k$  为实系数 ( $k \geq 1$ )。另外为了进一步改善图像的主观质量, 在运用小波方法对含噪信号消噪前, 先对信号的高频系数和低频系数进行适当的放大, 由于对信号放大会增大信号的亮度值, 所以在运用小波阈值法消噪后, 再对信号的高频系数和低频系数进行适当的缩小。综上所述, 本文处理方法如下:

(1) 对原始含噪信号进行小波级数分解, 将高频系数和低频系数进行适当的放大, 放大系数分别为  $k_1 = 2^{\frac{j-1}{2}}$  和  $k_2 = 2^{\frac{j}{2}}$ , 其中  $j$  为分解的尺度。

(2) 在小波域上, 对放大后的信号的小波系数进行阈值操作: 若小波系数大于  $\delta$ , 则保留, 若小波系数小  $\delta$ , 则将其置为零。

(3) 然后对阈值处理后的信号进行小波级数分解, 对信号的高频及低频系数进行适当的缩小, 其缩小比例系数分别为  $k_3 = 2^{-\frac{j-1}{2}}$  和  $k_4 = 2^{-\frac{j}{2}}$ 。

(4) 对处理后的小波信号系数进行重构, 即可得到消噪后的信号。

这就是本文所提出的系数放大方法。下面我们用该方法, 及其他一些方法进行信号消噪仿真对比实验。

## 3 仿真实验

### 3.1 小波分解尺度的选取

在信号去噪中, 一般只取最大分解尺度  $J$  为 3 ~ 5, 事实上,  $J$  越大, 则噪声和信号表现的不同特性越明显, 越有利于信噪分离; 但另一方面, 对重构来讲, 分解的次数越多, 则失真越大, 即重构误差越大。这是一对矛盾, 必须选择适当的  $J$ , 来兼顾二者。

很容易想到, 最大分解尺度  $J$  应该与原始信号的信噪比 (SNR) 有关。若 SNR 较大, 即主要以信号为主, 则  $J$  取得稍微小一点即可把噪声分离出去; 若 SNR 较小, 即主要以噪声为主, 则只有取大些才能把噪声抑制。因此, 所选尺度  $J$  应视 SNR 的大小而

定。根据实际表明,对一般的信号而言,若  $SNR > 20$ ,则取  $J = 3$ ;否则,取  $J = 4$  为好<sup>[5,6]</sup>。

### 3.2 仿真对比实验及性能分析<sup>[7]</sup>

本文采用 MATLAB7.0 对加噪的 HeaviSine 信号,采取傅立叶分析,默认阈值, Rigrsure 阈值以及本文提出的小波系数放大法进行仿真实验。其中小波系数放大法中用 Haar 小波对信号进行去噪处理,取原含噪信号的 SNR 分别取 2,3,4 等,分解层数为 4,对不同 SNR 下的处理效果加以比较,观察去噪结果。为了更好的比较实验的仿真性能好坏,可用消噪后所得信号的均方根误差(RMSE)与 SNR 来比较分析。我们知道对同一个含噪信号,经处理后得到的 RMSE 越小,SNR 越大消噪效果越好。它们的定义形式分别为:

$$RMSE = \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x(j) - \hat{x}(j))^2 \right]^{1/2},$$

$$SNR = 10 \log \left( \frac{\sum_{j=1}^N x^2(j)}{\sum_{j=1}^N [x(j) - \hat{x}(j)]^2} \right),$$

式中  $x(j)$  为原始信号在取样点  $j$  的幅值, $\hat{x}(j)$  为消噪后的信号在位置  $j$  的幅值, $N$  为信号的长度。

图 1 所示为不同方法下,对含噪的 HeaviSine 信号进行消噪后的结果。图中的原始 SNR 为 3,由图可以看出傅立叶分析消噪后效果不是很好,波形的最高幅值有明显变化,这是因为信号

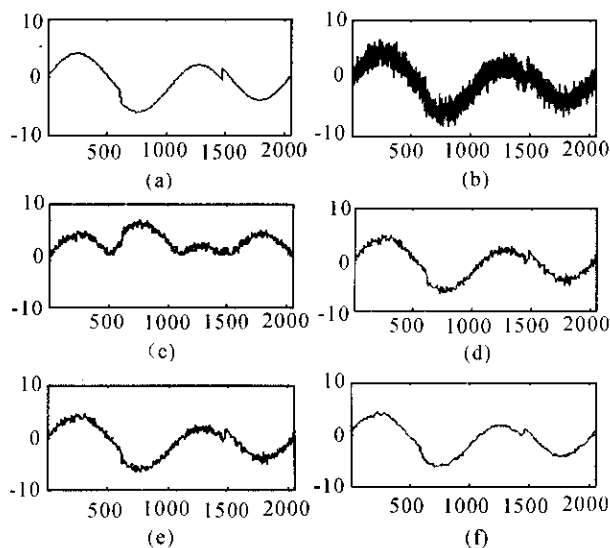


图 1 原始信号及各种方法消噪结果

(a)原始 HeaviSine 信号;(b)含噪信号 HeaviSine (SNR = 3);(c)傅立叶分析消噪后的信号;(d)默认阈值消噪后的信号;(e)Rigrsure 阈值方法消噪后的信号;(f)小波系数放大法去噪后的信号

集中在低频部分,噪声分布在高频部分,而傅立叶不能将信号的高频部分与噪声引起的高频干扰部分加以有效的区分,所以消噪效果比较差。用默认阈值与 Rigrsure 阈值方法进行消噪,效果比傅立叶消噪效果明显要好得多,已基本消除了信号中的噪声并保留了信号的大部分信息。用小波系数放大法进行消噪后,已基本消除了信号中的噪声并保留了信号的大部分信息,接近原始信号,主观视觉特性有明显的提高,从视觉特性上说明了小波系数放大法的有效性和优越性。

表 1 与表 2 分别是对 HeaviSine 信号用不同方法消噪得到的 RMSE 与 SNR,我们取原始含噪信号的 SNR 分别为 2,3,4 加以比较。从表中的数据可以看出,傅立叶方法的消噪效果要差一些,默认阈值与 Rigrsure 阈值方法的消噪效果要好于傅立叶方法,但小波系数放大法的消噪效果更好些,由表 1 知所得到的 RMSE 明显降低了,表 2 说明 SNR 得到了提高,从而说明的本文方法的有效性。

表 1 各种方法对 HeaviSine 信号处理所得 RMSE

原始 SNR	RMSE			
	傅立叶法	默认阈值法	Rigrsure 阈值法	小波系数放大法
2	3.6218	1.1958	0.1795	0.1394
3	5.4166	1.7999	0.1972	0.1546
4	7.2144	2.4084	0.2300	0.1771

表 2 各种方法对 HeaviSine 信号处理所得 SNR

原始 SNR	傅立叶法	默认阈值法	Rigrsure 阈值法	小波系数放大法
2	-4.8264	4.7989	21.2713	23.4682
3	-4.8007	4.7689	23.9760	26.0902
4	-4.7914	4.7381	25.1385	27.4067

## 4 结束语

本文所提出的一种新的基于小波变换的信号消噪方法,是根据信号与噪声的不同性质进行频率选择,能较好地消去信号中的噪声并保留原始信号的信息,通过仿真实验可知其消噪效果比较好,且信号的均方根误差得到了降低,信噪比有所提高,证明了该方法确实比传统的方法优越。

参考文献:

- [1] 徐晨,赵瑞珍,甘小冰.小波分析·应用算法[M].北京:科学出版社,2004.
- [2] DONOHO D L,JOHNSTONE I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994,

81:425-455.

- [3] WEYRICH N, WARHOLA G T. Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denosing[J]. IEEE Trans Image Processing, 1998(7):82-90.
- [4] 孙延奎. 小波分析及其应用[M]. 北京:机械工业出版社, 2005:220-221.
- [5] 秦前清, 杨宗凯. 实用小波分析[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 1994:56-80.

- [6] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安:西安交通大学出版社, 1995.
- [7] 胡昌华, 李国华, 刘涛, 等. 基于 MATLAB 6. x 的系统分析与设计——小波分析[M]. 西安:西安电子科技大学出版社, 2004.

(责任编辑:韦廷宗)

### 耐涝基因打造抗洪水稻

美国加利福尼亚大学戴维斯分校遗传学家 Pamela Ronald 等人近日报告说,他们在防涝水稻的培育中取得了突破——发现了一类使得植物能够在水中存活的基因。

淹没在水中的植物无法吸收空气中的二氧化碳和氧气,它们很难利用光合作用将太阳能转化为营养物质。Ronald 指出,农民们早就注意到,与其他植物相比,有些植物似乎能够更好地适应潮湿的环境,但是这些庄稼往往产量很低并且颗粒也不饱满。Ronald 同时表示,在没有摸清究竟是哪些基因在起作用的前提下培育此类作物是耗费时间且效率低下的。因此 Ronald 和她的研究小组开始着手调查这种帮助植物抵抗涝灾的特殊基因。通过比较抗涝植物的基因组,研究人员能够抑制植物基因组中一个特殊区域的抗耐性,他们将这一区域命名为浸没 2。当植物被淹没后,这一基因区域中的两个基因的表达模式出现了变化,当将其中一个名为 Sub1A-1 的基因人工插入基因组后,便能够将不耐水的植物转变为耐涝的植物。Ronald 推测,这种移植的基因能够通过减缓自身的新陈代谢速度从而使植物适应有限的气体交换,这差不多相当于基因帮助植物在水下屏住呼吸。

在新技术的支持下,研究人员培育出了保持正常产量的抗涝水稻,如今正在印度和孟加拉试验种植这种新型水稻,在这里,转基因作物将得到测试,从而验证它们除了对洪水具有特殊的抗耐性外,不具有其他任何副作用。

柯林斯堡市科罗拉多州立大学的植物病理学家 Jan Leach 表示,这项研究成果意味着“分子生物学家与植物种植者之间进行的一次完美合作”。Leach 指出,对于抗涝基因的发现将极大地促进培育最优水稻的步伐。

据《科学网》