广西科学院学报 2007,23(1):4～6
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23,No. 1 February 2007

# 关于连续小波变换的注记*

# A Note on Continuous Wavelet Transform

张小桂,丁宣浩
ZHANG Xiao-gui,DING Xuan-hao

(桂林电子工业学院计算科学与数学系,广西桂林 541004)
(Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

**摘要**:根据连续小波的定义证明 Haar 小波和 Mexico 帽小波为基小波,提出一种基于卷积构造基小波的方法并证明尺度函数和多分辨分析生成的小波是基小波.

**关键词**:小波 基小波 尺度函数 多分辨分析
**中图法分类号**:O174.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)01-0004-03

**Abstract**:The comparison of several definitions of CWT indicates that Haar wavelet and Mexico wavelet are base wavelet. Then one method of constructing base wavelet based on convolution is put forward. It is proved that wavelets produced by scale functions are base wavelet.

**Key words**:wavelet,base wavelet,scale function,MRA

小波分析是上个世纪 80 年代初发展起来的新兴数学分支,它无论是对数学,还是对其他应用学科都产生了深远的影响.小波分析最初是在工程应用中发展起来的,是工程应用与数学结合的结晶.小波变换是一个时间和频率的局域变换,因而能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数和信号进行多尺度细化分析,解决了傅立叶变换不能解决的许多困难问题,被誉为"数学的显微镜"[1].现在连续小波变换已经被广泛地应用于时频联合分析、去噪、特征提取、地质勘探、涡流、力学等领域,比如在去噪中,连续小波变换具有较大的冗余性,对于去噪和数据恢复是十分有利的[2].小波对信号的奇异点十分敏感,对突变信号的分析非常有效,因而在故障检测和边缘检测中,连续小波变换具有比传统的二进小波更好的检测能力,非常适用于故障检测[3~5].本文根据连续小波的定义证明 Haar 小波和 Mexico 帽小波为基小波,提出一种基于卷积构造基小波的方法并证明尺度函数和多分辨分析生成的小波是基小波.

## 1 连续小波变换的定义比较

**定义 1**[6] 如果 $\psi \in L^2(R)$ 满足"容许性"条件:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega < \infty,$$

那么称 $\psi$ 是一个"基小波"或"母小波".关于一个基小波 $\psi$,在 $L^2(R)$ 上的连续小波变换或积分小波变换定义为

$$(W_\psi f)(b,a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \overline{\psi(\frac{t-b}{a})} \mathrm{d}t, f \in L^2(R).$$

"容许性"条件是为了确保小波逆变换可以进行.定义 1 中 $\psi \in L^2(R)$ 的条件似乎稍弱,如果 $\psi$ 和 $\hat{\psi}$ 都是窗函数,则基小波可以给出有限面积的时间-频率窗.另外 $\hat{\psi}$ 是一个连续函数,则有 $\hat{\psi}(0) = 0$[6];而 $\psi$ 是窗函数表明 $\psi \in L^1(R)$[6],这样可以得到定义 2.

**定义 2**[7] 如果 $\psi \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 满足"容许性"条件:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega < \infty,$$

---

收稿日期:2006-02-08
修回日期:2006-03-22
作者简介:张小桂(1980-),男,硕士研究生,主要从事图像信号处理研究工作。
* 广西自然科学基金(桂科自 0542046)资助。

那么称 $\psi$ 是一个“基小波”，也称“容许小波”. 关于一个基小波 $\psi$，在 $L^2(R)$ 上的连续小波变换或积分小波变换定义为

$$(W_\psi f)(b,a)=|a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t,f\in L^2(R).$$

注：基小波属于 $L^1(R)$ 在理论上会对判定函数是否是基小波产生困难.

**定义 3**[1] 如果 $\psi$ 满足如下两条要求

(1)$\psi(x)$ 是连续的且呈现指数衰减[即 $\psi(x)\leqslant \mathrm{M}e^{-\mathrm{C}|x|}$，对某些常量 C,M]，

(2)$\psi$ 的积分为零[即$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{d}x=0$]，

则定义函数 $L^2(R)$ 的小波变换为

$$(W_\psi f)(b,a)=|a|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\overline{\psi(\frac{t-b}{a})}\mathrm{d}t,f\in L^2(R).$$

定义 3 中的衰减条件说明和积分为零条件可以推出定义 2 中的“容许性”条件[1]，而由定义 2 中 $\psi\in L^1(R)$，可推出 $\hat{\psi}$ 是一个连续函数，所以由“容许性”条件中 $C_\psi$ 的有限性可以推出 $\hat{\psi}(0)=0$，或者等价地有$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{d}x=0$，这就是 $\psi$ 称为“小波”的原因[6].

## 2 Haar 小波和 Mexico 帽小波为基小波的证明

根据连续小波的定义证明 Haar 和 Mexico 为基小波.

### 2.1 Haar 小波

$$\psi(t)=\begin{cases}1\cdots\cdots 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ -1\cdots\cdots \frac{1}{2}\leqslant t<1,\psi\in L^1(R)\cap L^2(R),\\ 0\cdots\cdots \text{其他}.\end{cases}$$

**证明** 因为 $\hat{\psi}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)e^{-it\omega}\mathrm{d}t=\int_0^{1/2}e^{-it\omega}\mathrm{d}x-\int_{1/2}^{1}e^{-it\omega}\mathrm{d}t=-\frac{e^{-it\omega}}{i\omega}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\frac{e^{-it\omega}}{i\omega}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{i\omega}[e^{-\frac{i\omega}{2}}-1]^2=\frac{1}{i\omega}[(\cos\frac{\omega}{2}-1)-i\sin\frac{\omega}{2}]^2$,

$$|\hat{\psi}(\omega)|^2=\frac{1}{|\omega|^2}|(\cos(\frac{\omega}{2})-1)-i\sin\frac{\omega}{2}|^4=\frac{1}{|\omega|^2}[(\cos\frac{\omega}{2}-1)^2+\sin^2\frac{\omega}{2}]^2=\frac{1}{|\omega|^2}[\cos^2\frac{\omega}{2}-2\cos\frac{\omega}{2}+1+\sin^2\frac{\omega}{2}]^2=\frac{4(1-\cos\frac{\omega}{2})^2}{|\omega|^2}=\frac{16\sin^4\frac{\omega}{4}}{|\omega|^2},$$

所以$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{16\sin^4\frac{\omega}{4}}{|\omega|^3}\mathrm{d}\omega<\infty$.

故 $\psi(t)$ 是一个基小波.

### 2.2 Mexico 帽小波

$$\psi(t)=(1-t^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}},-\infty<t<\infty.$$

**证明** 令 $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$，则$\psi(t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f''(t)$，那么

$$\hat{\psi}(\omega)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f''e^{-it\omega}\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\omega\int_{-\infty}^{\infty}f'e^{-it\omega}\mathrm{d}t=-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}i\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-it\omega}\mathrm{d}t=\frac{\omega^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-it\omega}\mathrm{d}t=\omega^2e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

因为 $g_\alpha(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}}$，所以 $\hat{g}_\alpha(\omega)=e^{-\alpha\omega}$.

所以 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\omega|^4e^{-\omega^2}}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|\omega|^3e^{-\omega^2}\mathrm{d}\omega<\infty$.

故 $\psi(t)$ 是一个基小波.

## 3 连续小波的构造

**定理 1** 设 $\psi$ 是一个基小波，且 $\psi\in L^1(R)$，那么对任意 $g\in L^1(R)$，有

$$h(t)=\psi*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)g(t-x)\mathrm{d}x$$

也是一个基小波.

**证明** (1) 首先证明 $|\hat{g}(\omega)|$ 是 $R$ 上的有界函数：

$$|\hat{g}(\omega)|=|\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-it\omega}\mathrm{d}t|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)e^{-it\omega}|\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\mathrm{d}t<\infty,$$

即存在一个正整数 M，使得 $|\hat{g}(\omega)|<\mathrm{M}$.

(2)$\hat{h}(\omega)=(\psi*g)^\wedge(\omega)=\hat{\psi}(\omega)\hat{g}(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2|\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\mathrm{M}^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty,$$

于是结合(1)(2)，得到 $h(t)$ 也是一个基小波.

**例 1** 设 $\psi$ 是 Haar 小波，$g$ 是具有紧支的连续函数，则 $h(t)=\psi*g(t)$ 是一个基小波.

比如 $g=\begin{cases}\cos x,|x|\leqslant 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，很明显

$$|\hat{g}(\omega)| \leqslant \int_{-1}^{1} |\cos t e^{-it\omega}| \mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^{1} |\cos t| \mathrm{d}t < 2,$$

此时

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{h}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2 |\hat{g}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega <$$

$$4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} \mathrm{d}\omega < \infty$$(Haar 小波为基小波)，

因此，$h(t)$ 为基小波.

**引理 1**[8]　$\psi$ 是由尺度函数和多分辨分析生成的小波，则 $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}(j,k \in \mathbf{Z})$ 是 $L^2(R)$ 的 Riesz 基.

**引理 2**[8]　设 $\{\phi_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 是可分 Hilbert 空间 H 中的一列向量，则下述命题等价：

(1) $\{\phi_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 是 H 的 Riesz 基；

(2) $\{\phi_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 是 H 的框架，且 $\{\phi_j\}_{j\in \mathbf{Z}}$ 是 $l^2(J)$ 线性无关的.

**定理 2**　由尺度函数生成的小波是基小波.

**证明**　由引理 1 可知尺度函数生成的小波得到的 $\{\psi_{j,k}(x), j,k \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(R)$ 的 Riesz 基，而由引理 2 可知 $\{\psi_{j,k}(x), j,k \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(R)$ 上的框架. 即 $\{\psi_{j,k}(x), j,k \in \mathbf{Z}\}$ 生成 $L^2(R)$ 的一个框架，而框架一定满足二进小波的稳定性条件，那么它必定是一个二进小波[6]，而一个二进小波必然是一个基小波.

这样，就证明了通过尺度函数和多分辨分析生成的小波是基小波.

**推论**　Meyer 小波与 Daubechies 小波都是基小波.

因为 Meyer 小波和 Daubechies 小波都是由尺度函数和多分辨分析产生的小波，因此根据定理 2 它们都是基小波.

**参考文献：**


[1] ALBERT BOGGESS, FRANCIS J NARCOWICH. 小波与傅立叶分析基础[M]. 芮国胜，康健，译. 北京：电子工业出版社，2004.

[2] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京：科学出版社，1999.

[3] MALLAT S, ZHONG S. Characterization of signal from multiscale edges [J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14 (7): 710-732.

[4] 杨宗凯. 小波去噪及其在信号检测中的应用[J]. 华中理工大学学报，1997，25(2)：1-4.

[5] 林京，屈梁生. 基于连续小波变换的信号检测技术与故障诊断[J]. 机械工程学报，2000，36(12)：95-100.

[6] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴，译. 西安：西安交通大学出版社，1995.

[7] 孙延奎. 小波分析及其应用[M]. 北京：机械工业出版社，2005.

[8] 丁宣浩，孙建明，杨美香. Hilbert 空间中的框架与 Riesz 基[J]. 桂林电子工业学院学报，2005，25(3)：79-83.


（责任编辑：凌汉恩　邓大玉）

## 高叶酸含量转基因西红柿培育成功

叶酸是人类身体生长和发育过程中最为重要的营养物质之一，医生建议打算怀孕和已经怀孕妇女的饮食中应该含有丰富的叶酸。因为在人体核苷生产和许多其他基本的新陈代谢过程中，叶酸均具有重要作用。没有它，人体细胞分裂将不可能正常进行。事实上，新生婴儿的生理缺陷和儿童其他发育问题，以及许多成人健康问题如贫血等均同缺乏叶酸相关。类似于菠菜的绿叶菜通常含有维生素，但几乎没有人能摄入足够量的绿叶菜来获得所需的叶酸。美国佛罗里达大学植物生物化学家安德鲁·瀚森近日表示，他和他的同事采用转基因技术，成功地培育出含有人们每日所需的叶酸的转基因西红柿。他们表示，转基因西红柿要获得美国食品和药物管理局的批准还需要数年的时间。而在此之前，还需要完成许多的研究工作，其中包括转基因对西红柿自身带来的影响。此外，他们发现，转基因西红柿中的叶酸量得到提高的同时，植物中另一种化学物质蝶啶的量也在增加。但目前研究人员对该化学物质的性质了解甚少，因此还必须进一步了解和解除它所可能带来的影响。

（据科学网）