

# 基于有限元自动生成系统(FEPG)的组合网格算法\*

## A Composite Grid Method Based on the System of Finite Element Program Generator(FEPG)

唐菊珍<sup>1</sup>, 马昌凤<sup>1,2</sup>

TANG Ju-zhen<sup>1</sup>, MA Chang-feng<sup>1,2</sup>

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004; 2. 福建师范大学数学与计算机科学学院, 福建福州 350007)

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou, Fujian, 350007, China)

**摘要:**针对工程计算中经常出现的局部特性(特别是奇性)问题,和以往解决此类问题的算法的局限性,提出一种基于有限元自动生成系统(FEPG)的组合网格算法.该算法采用两套网格求解,在整个求解区域采用较粗网格,不考虑奇异的影响;而在奇异附近区域采用较细的网格,考虑奇异的影响;整体粗网格求解和局部细网格求解反复迭代,求得最终结果.该算法用于实际工程计算的迭代次数少,与常用的有限元方法所求得解相符合,为求解大型实际复杂问题提供了一个好的算法和思路.

**关键词:**组合网格 有限元 有限元自动生成系统

中图分类号:O241.82 文献标识码:A 文章编号:1002-7378(2007)01-0007-04

**Abstract:** We in this paper present a composite grid method based on the system of finite element program generator (denoted by FEPG) to solve finite element problems with local singularity, which often occurs in engineering and scientific computing. Composite grid method uses a coarse mesh for the whole area without considering the impact of singularity and a fine mesh for the local singular area considering the impact of singularity respectively. It solves the global coarse mesh problem and the local fine mesh problem iteratively and obtains the final result with very small computation. This method presents a good idea for solving complex problems.

**Key words:** composite grid, finite element, FEPG

在实际的工程计算中,计算区域的地质结构比较复杂,有许多很薄的断层,而在对这些区域做有限元计算分析(如渗流,应力计算)时,工程上往往需要考虑这些断层对计算结果的影响.但是,这些断层有的有几十厘米厚,有的只有十几厘米,而整个有限元计算模型的尺寸是上百米,如果在整体有限元计算中考虑这些断层,那么整体有限元的网格剖分将十分困难,即使能剖分网格,也会造成节点过多,有限元计算精度大为降低或根本无法进行计算.类似这

样的奇异奇性问题还有:热力学中的不连续传热系数问题,油藏工程中注水驱油问题,变压器薄钢板的涡流分析等.在工程计算中常采用的方法有局部网精细代替整体网精细<sup>[1]</sup>,快速自适应组合网格方法<sup>[2]</sup>(简记为FAC),整体局部方法(Global-Local)<sup>[3]</sup>等.但他们都存在不少缺点或限制,例如:有效地局部化目标经常与可靠计算相冲突,快速自适应组合网格方法则要求规则网格且粗细两套网格嵌套,整体局部方法的计算效果又远不及快速自适应组合网格方法等.

鉴于此,我们提出采用基于有限元自动生成系统(FEPG)的组合网格算法来解决这一难题,即采用两套网格求解,在整个求解区域采用较粗网格,并且不考虑奇异的影响,而在奇异附近区域采用较细

收稿日期:2005-11-01

修回日期:2006-02-09

作者简介:唐菊珍(1980-),女,硕士研究生,主要从事有限元方法及其应用研究.

\* 国家自然科学基金项目(批准号:10661005)和广西自然科学基金项目(批准号:0640165)资助.

的网格,考虑奇异的影响.整体粗网格求解和局部细网格求解反复迭代,求得最终结果.其中引入插值矩阵  $D$  使得粗细两套有限元空间的两个基函数之间的能量积分变为同一有限元空间的基函数之间的积分.该方法适应于非规则网格,即粗细网格皆可独立生成,彼此互不制约,同时能真正地用于工程实际问题.在整体区域和局部区域材料参数相同的条件下,许进超等<sup>[2,3]</sup>从数学上证明了用两网格所求得的数值解可以在粗网格区域达到粗网格的精度,而在细网格内部达到细网格的精度,这就从理论上说明了组合网格法的有效性.

## 1 算法描述

为了阐述方便,考虑齐次边值问题:

$$\begin{cases} L_c v = f_c, \Omega_c; \\ L_f u = f_f, \Omega_f, v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}. \end{cases}$$

对应的虚功方程如下.

$$\begin{cases} (L_c v, \bar{v})_{\Omega_c}; \\ (L_f u, \bar{u})_{\Omega_f} = (f_f, \bar{u})_{\Omega_f}, v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}. \end{cases}$$

这里  $L_c, L_f$  为椭圆微分算子,整体计算区域  $\Omega$  如图 1 所示,  $\partial\Omega$  是  $\Omega$  的边界;  $\Gamma$  是  $\Omega_c$  和  $\Omega_f$  的交界面(线).我们对  $\Omega$  和  $\Omega_f$  分别进行网格剖分,得到粗网格  $T_H$  和细网格  $T_h$  ( $T_h$  比  $T_H$  网格尺寸小很多),并有相应的有限元空间  $S_H$  和  $S_h, T_H$  和  $T_h$  不一定是规则网格.

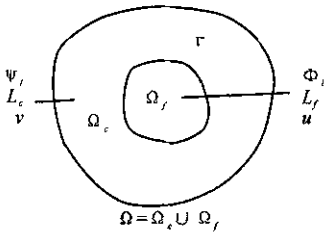


图 1 计算区域  $\Omega$

### 1.1 计算格式

$$\begin{cases} ((L_c v - f_c), \bar{v})_{\Omega_c} = ((L_c u_c - f_c), \bar{v})_{\Omega_c} - \\ ((L_f u_f - f_f), \bar{v})_{\Omega_f}; & (1) \\ (L_f u, \bar{u})_{\Omega_f} = (f_f, \bar{u})_{\Omega_f}, u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}. & (2) \end{cases}$$

令细网格上的基函数为  $\{\Phi_j\}_{j=1}^{n_f}$ ,粗网格上的基函数为  $\{\Psi_j\}_{j=1}^{n_c}$ ,则有  $\Psi = D\Phi, D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{ml} \end{bmatrix}$  为插值矩阵 ( $l$  为粗网格单元节点数,  $m$  为细网格节点个数).

$$v = \sum_j v_j \Psi_j = V^T \Psi, u = \sum_j u_j \Phi_j = U^T \Phi, v =$$

$$V^T D \Phi (\text{in } \Phi_f).$$

对(1)式有

$$(L_c v, \bar{v})_{\Omega_c} - (f_c, \bar{v})_{\Omega_c} = (L_c V^T \Psi, \bar{V}^T \Psi)_{\Omega_c} - \bar{V}^T (f_c, \Psi)_{\Omega_c} = \bar{V}^T (A_c V - F_{\Omega_c}),$$

$$\begin{aligned} & ((L_c u_c - f_c), \bar{v})_{\Omega_c} - ((L_f u_f - f_f), \bar{v})_{\Omega_f} = \\ & (\bar{V}^T (L_c u_c, \Psi)_{\Omega_c} - \bar{V}^T (f_c, \Psi)_{\Omega_c}) - (\bar{V}^T (L_f u_f, \\ & \Psi)_{\Omega_f} - \bar{V}^T (f_f, \Psi)_{\Omega_f}) = (\bar{V}^T (L_c U_c^T \Phi), D \Phi)_{\Omega_c} - \\ & \bar{V}^T (f_c, D \Phi)_{\Omega_c}) - (\bar{V}^T (L_f (U_f^T \Phi), D \Phi)_{\Omega_f} - \bar{V}^T (f_f, \\ & D \Phi)_{\Omega_f}) = (\bar{V}^T D (L_c \Phi, \Phi)_{\Omega_c} U_c - \bar{V}^T D (f_c, \Phi)_{\Omega_c}) - \\ & (\bar{V}^T D (L_f \Phi, \Phi)_{\Omega_f} U_f - \bar{V}^T D (f_f, \Phi)_{\Omega_f}) = \bar{V}^T D (A_c^{\Omega_c} U_c \\ & - F_c^{\Omega_c}) - \bar{V}^T D (A_f U_f - F_f), \end{aligned}$$

于是

$$A_c V - F_{\Omega_c} = D (A_c^{\Omega_c} U_c - F_c^{\Omega_c}) - D (A_f U_f - F_f),$$

其中

$$A_c (L_c \Psi, \Psi)_{\Omega_c}, A_f = (L_f \Phi, \Phi)_{\Omega_f}, A_c^{\Omega_c} = (L_c \Phi, \Phi)_{\Omega_c}, F_c^{\Omega_c} = (f_c, \Phi)_{\Omega_c}, F_f = (f_f, \Phi)_{\Omega_f}.$$

对(2)式有

$$(L_f u, \bar{u})_{\Omega_f} = (L_f U^T \Phi, \bar{U}^T \Phi)_{\Omega_f} = \bar{U}^T (L_f \Phi, \Phi)_{\Omega_f} U = \bar{U}^T A_f U; u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}.$$

$$\bar{U}^T (f_f, \Phi)_{\Omega_f} \Rightarrow \bar{U}^T A_f U = \bar{U}^T F_{\Omega_f}, u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}.$$

### 1.2 算法步骤

初始化:  $n = 0, u_c^0 = 0, u_f^0 = 0;$

步骤 1: 求  $v^{n+1} \in S_H$ , 满足

$$((L_c v^{n+1} - f_c), \bar{v})_{\Omega_c} = ((L_c u_c^n - f_c), \bar{v})_{\Omega_c} - ((L_f u_f^n - f_f), \bar{v})_{\Omega_f}, \forall \bar{v} \in S_H.$$

步骤 2: 求  $u_f^{n+1} \in S_h, u_c^{n+1} \in S_h$  满足

$$\begin{cases} (L_c u_c^{n+1}, \bar{u})_{\Omega_c} = (f_c, \bar{u})_{\Omega_c}, \\ u_c^{n+1}|_{\Gamma} = v^{n+1}|_{\Gamma} = v^{n+1}|_{\Gamma}, \bar{u} \in S_h; \\ (L_f u_f^{n+1}, \bar{u})_{\Omega_f} = (f_f, \bar{u})_{\Omega_f}, \\ u_f^{n+1}|_{\Gamma} = v^{n+1}|_{\Gamma}, \bar{u} \in S_h. \end{cases}$$

的出反力:  $((L_c u_c^n - f_c), \bar{v})_{\Omega_c} - ((L_f u_f^n - f_f), \bar{v})_{\Omega_f}$ , 置  $n = n + 1$ , 转步骤 1.

## 2 软件实现

根据组合网格法算法设计和 FEPG 系统的框架,软件实现主要有如下几部分:原始文件的填写,前处理,插值矩阵  $D$  及其相关矩阵  $JD$  的计算,粗细网格迭代求解,后处理及显示.

### 2.1 填写原始文件

依据 FEPG 系统我们需要填写的文件是很少的,主要是后缀名为 GCN、GIO、PDE (CDE、VDE、

FBC)的文件。

GCN 文件给出问题的算法,如是多场问题,则同时给出各物理场之间的耦合方式,GCN 文件还给出求解的流程。

GIO 文件给出各个物理场的 PDE(或 VDE)文件名以及求解区域的体单元类型信息及坐标系名。

PDE(CDE、VDE、FBC)文件的主要内容是微分方程表达式,CDE 文件的主要内容是复变量微分方程表达式,VDE 文件的主要内容是微分方程响亮表达式。由这些文件,单元子程序自动生成系统自动生成计算单元刚度矩阵,单元阻尼矩阵和单元荷载向量等单元子程序。对于 PDE、VDE、CDE 这 3 种文件,我们只需要填写其中一种。FBC 文件的主要内容是边界条件(第 2 类和第 3 类边界条件)的微分方程表达式。由这个方程,单元子程序自动生成系统自动生成计算边界条件的单元刚度矩阵,阻尼矩阵和荷载向量等子程序。

关于这些文件的具体填写可以参阅 FEPG 参考手册<sup>[4~6]</sup>。

## 2.2 前、后处理

前处理部分主要处理的是粗、细两套网格的节点坐标信息,单元节点号信息,节点自由度信息即节点是否被约束信息,单元材料信息,节点边界条件。可以通过操作 FEPG 系统的 GID 图形化界面而得到。计算求解结束后,在 GID 演示界面上点击相应的链接就可给出相应的结果演示。

## 2.3 $D$ 矩阵和 $JD$ 矩阵的计算

先逐个判断细网格上的点所对应的粗网格的单元号,由粗网格单元号所对应的粗网格单元节点号组成的矩阵即为所求  $JD$  矩阵。现以四边形单元为例说明  $D$  矩阵的求法。

设  $p$  为细网格中的任意一点, $e_p$  为  $JD$  矩阵中  $p$  对应的粗网格单元,其单元节点号为  $p_1, p_2, p_3, p_4$ ; 坐标值为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ ;  $p$  的坐标为  $(x, y)$ 。设参考坐标系为  $\zeta, \eta$ ,参考单元是  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  的正方形单元。

$$x = \frac{1}{4}[(1 - \zeta)(1 - \eta) * x_1 + (1 + \zeta)(1 - \eta) * x_2 + (1 + \zeta)(1 + \eta) * x_3 + (1 - \zeta)(1 + \eta) * x_4],$$

$$y = \frac{1}{4}[(1 - \zeta)(1 - \eta) * y_1 + (1 + \zeta)(1 - \eta) * y_2 + (1 + \zeta)(1 + \eta) * y_3 + (1 - \zeta)(1 + \eta) * y_4],$$

由牛顿迭代法求解出  $p$  点的参考坐标值  $\zeta_i, \eta_i$ ,则其

对应  $D$  矩阵的分量  $d_{ij}(i$  为  $p$  所对应的细网格节点号,  $j = 1, 4)$  为

$$d_{i1} = \frac{1}{4}(1 - \zeta_i)(1 - \eta_i); d_{i2} = \frac{1}{4}(1 + \zeta_i)(1 - \eta_i);$$

$$d_{i3} = \frac{1}{4}(1 + \zeta_i)(1 + \eta_i); d_{i4} = \frac{1}{4}(1 - \zeta_i)(1 + \eta_i).$$

其他类型的单元也可由相应的形函数得到。

## 2.4 粗细网迭代求解

运行计算程序的批命令即可完成整个迭代计算求解。现给出一个渗流问题的批命令。

```
starta disp0 id0 nv disp0 bfd time0 time coor0
unod
copy bfd abfd
startb dispb0 idb0 nvb dispb0 bfdb time0 time
coor1 unodb dmb. io elem0 sysb diagb
cgmjd coor1 coor0 elem0 jd0 ddf>dadf
if exist end del end
:1
edma disp0 time nv coor0 bfd einform estiff
elem0 f mass sys
solv sys f einform estiff u
udma disp0 time sys bfd nv u displace end
ddtv idb0 id0 jd0 bfdb unod
edmb dispb0 sysb time nvb coor1 bfdb diagb
elem0 f displace end edmc dispb0 idb0 coor1
einform estiff elem0
ddu idb0 id0 jd0 unode abfd bfd
if not exist end goto 1
```

## 3 应用实例

### 例 1 二维渗流问题

假设一个长 6m,宽 2m 的物体,中间有一 0.05m 的斜断层,内部没有源,左边上加了 10kPa 的压力,右边是 0 压力。求在给定渗透率的情况下,其压力场的分布。其中断层与物体的渗透率相差 1~6 倍,物体渗透率取为 5.0,断层渗透率取为 5.0~6.0。

组合网格法中的粗、细网格分别如图 2 和图 3 所示。

比较图 4 和图 5 可以看出,用组合网格法计算可得到很好的结果,并且用此方法的迭代次数比较少,这对求解大型实际复杂问题提供了一个好的算法和思路。

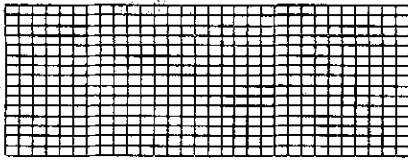


图 2 粗网格

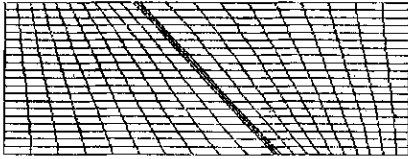


图 3 细网格



图 4 组合网格法的计算结果

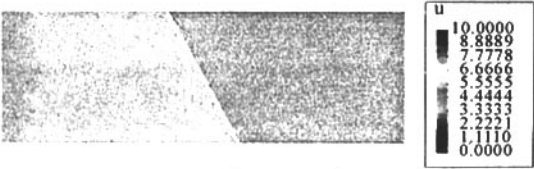


图 5 直接计算的结果

### 例 2 三线圈系结构的感应仪器响应计算

仪器由一个发射线圈和两个接收线圈组成,三线圈同轴同半径,仪器内为绝缘介质组成,两个接收线圈的绕向相反,串联连接后引出两个接收端,使用灵敏接收线圈的目的是使在真空中的直耦信号和为零,即接收信号为零.发射线圈的激励信号为:  $i_T = I_r e^{j\omega t}$ ,  $I_r = 1$ , 发射线圈的高度为 0.03m.

(1) 基本方程为:

$$\begin{cases} \nabla \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times A) - \nabla (\frac{1}{\mu} \nabla \cdot A) + \sigma j\omega A + \sigma \nabla \phi = J_s, \\ \nabla \cdot (-\sigma j\omega A - \sigma \nabla \phi) = 0. \end{cases}$$

在涡流区边界条件:  $A = 0, \phi = 0$ . 在无限远处.

(2) 地层模型剖面图如图 6 所示:

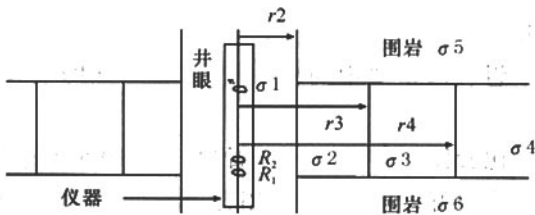


图 6 地层模型剖面

(3) 图 7 结果显示用组合网格法所求得的结果是比较令人满意的,其电场强度矢量图与用通常的

有限元方法所求得的结果是相符合的.

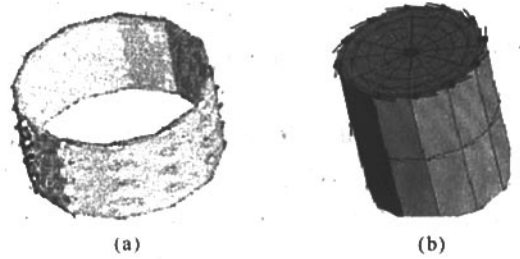


图 7 电场强度矢量图

(a)发射线圈;(b)接收线圈

## 4 结束语

本文提出的算法用于实际工程计算的迭代次数少,与常用的有限元方法所求得的结果相符合,这为解决大型实际复杂问题提供了一个好的算法和思路.此算法有待于进一步研究发展的方向主要有:(1)用它来研究与时间有关的问题和非线性问题;(2)将它实现软件并行化,发展成为并行组合网格法;(3)将组合网格法与自适应处理组合起来,并同时并行处理,发展成为自适应的并行组合网格法等.

致谢:

本算法在梁国平研究员(北京火箭软件有限公司的创始人)细心指导下才得以顺利完成.谨此深深感谢梁老师以及北京火箭软件有限公司的所有同事.

参考文献:

- [1] 吕涛,石济民,林振宝.区域分解算法——偏微分方程数值解新技术[M].北京:科学出版社,1999.
- [2] XU J. The auxiliary space method and optimal multigrid preconditioning techniques for unstructured grids[J]. Computing, 1996, 56(3): 215-235.
- [3] XU JINCHAO, ZHOU AIHUI. Local and parallel finite element algorithms based on Two-Grid discretizations [J]. Mathematics of Computation, 2000, 231(69): 881-909.
- [4] 王勖成.有限单元法[M].北京:清华大学出版社, 2003.
- [5] 北京火箭软件有限公司.有限元自动生成系统 FEPG 使用说明 [EB/OL]. [2005-11-01]. <http://www.fegensoft.com>.
- [6] 北京火箭软件有限公司.基于 FEPG 的有限元方法 [EB/OL]. [2005-11-01]. <http://www.fegensoft.com>.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)