广西科学院学报 2007,23(2):67~69
Journal of Guangxi Academy of Sciences Vol. 23, No. 2 May 2007

一类四阶粘性扩散方程广义解的唯一性*

Uniqueness of Solutions to a Fourth Order Viscous Diffusion Equation

覃思乾,凌征球
QIN Si-qian, LING Zheng-qiu

(玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000)
(Department of Mathematics and Computation Science, Yulin Teachers' College, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要:基于椭圆算子,证明初边值问题:$\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+\frac{\partial^4\Phi(u)}{\partial x^4}=0,(x,t)\in Q_T,u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,t\in(0,T),u(x,0)=u_0(x),x\in(0,1),\lambda\geqslant 0$ 是粘性系数,$Q_T=(0,1)\times(0,T),\Phi(u)=|u|^{q-2}u,q>1$,最多存在一个 L^2 解.

关键词:扩散方程 粘性 解 唯一性 椭圆算子
中图法分类号:O175.29 **文献标识码**:A **文章编号**:1002-7378(2007)02-0067-03

Abstract: Based on elliptic operators, the initial boundary value problem: $\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+\frac{\partial^4\Phi(u)}{\partial x^4}=0,(x,t)\in Q_T,u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,t\in(0,T),u(x,0)=u_0(x),x\in(0,1),\lambda\geqslant 0,Q_T=(0,1)\times(o,T),\Phi(u)=|u|^{q-2}u,q>1$, has at most one L^2 solution.

Key words: diffusion equation, viscous, solution, uniqueness, elliptic operator

考虑初边值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})+\frac{\partial^4\Phi(u)}{\partial x^4}=0,(x,t)\in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,t\in(0,T), \quad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in(0,1), \quad (3)$$

其中 $\lambda\geqslant 0$ 是粘性系数,$Q_T=(0,1)\times(0,T),\Phi(u)=|u|^{q-2}u,q>1$.

问题(1)是自然界中广泛存在的某些现象的数学模型,当 $\lambda=0$ 时,得到一类四阶非线性扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4\Phi(u)}{\partial x^4}=0.$$

此方程在满足 $\Phi'(s)=0$ 的点上是退化的,而且解的存在性与唯一性问题已经解决[1].当 $\lambda>0$ 时,文献[2]研究了二阶扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda\frac{\partial\Delta u}{\partial t}=\Delta A(u)+\mathrm{div}\vec{B}(u),$$

也证明了其广义解的唯一性.对于初边值问题(1)~(3),文献[1]讨论了其广义解的存在性,文献[3]讨论了当 $\lambda=1$ 的情况,并使用椭圆算子的方法,证明了 L^2 解的唯一性.受文献[3]的启发,本文讨论当 $\lambda\geqslant 0$ 时,初边值问题(1)~(3)L^2 解的唯一性.所得结果补充了文献[1]中广义解唯一性的结论.

1 主要结果

定义 1 函数 $u(x,t)$ 称为初边值问题(1)-(3)的 L^2 解,如果 $u\in L^2(Q_T),\Phi(u)\in L^2(Q_T)$,而且对于任意的检验函数 $\varphi(x,t)\in C^\infty(Q_T),\varphi(0,t)=\varphi(1,t)=\varphi_x(0,t)=\varphi_x(1,t)=\varphi_x(x,T)=0$,有积分等式

$$-\int_0^1 u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^1\lambda u_0(x)\frac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial x^2}\mathrm{d}x-$$

收稿日期:2006-12-25
修回日期:2007-03-12
作者简介:覃思乾(1971-),男,讲师,主要从事偏微分方程的研究。
* 2006 年广西教育厅科研项目(编号:234)资助。

$$\iint_{Q_T} u(I-\lambda\Delta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\Phi(u)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0 \quad (4)$$

成立，其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

由定义 1 可以知道，对任意的函数 $\varphi\in H_0^2(Q_T)\cap H^4(Q_T)$，积分等式(4) 也是成立的.

定理 1 初边值问题(1) ～ (3) 最多存在一个 L^2 解.

2 定理 1 的证明

假设 $u_1,u_2\in L^2(Q_T)$ 是初边值问题(1) ～ (3) 的两个 L^2 解. 令 $z=u_1-u_2, v=\Phi(u_1)-\Phi(u_2)$，根据 L^2 解的定义，可以得到

$$-\iint_{Q_T} z(I-\lambda\Delta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T} v\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \quad (5)$$

我们希望通过选择特殊的检验函数 φ 来证明(5) 式在几乎处处的 Q_T 满足 $z=0$.

对充分小的 $\mu>0$，定义算子

$$T_\mu: L^2(I)\to H_0^2(I)\cap H^4(I), g\to y,$$

其中 $I=(0,1), y=T_\mu g$ 是由两点边值问题

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\mu y=g,(\mu>0),$$

$$y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0,$$

唯一决定的. 而且容易看出算子 T_μ 是自共轭的，也就是对任意的 $f,g\in L^2(I)$ 有

$$\int_0^1 g(T_\mu f)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(T_\mu g)\mathrm{d}x.$$

由椭圆方程的 L^2 理论[4]，有 $T_\mu g\in H_0^2(I)\cap H^4(I)$ 满足

$$\mu^2\int_0^1 (T_\mu g)^2\mathrm{d}x+2\mu\int_0^1(\frac{\partial^2 T_\mu g}{\partial x^2})^2\mathrm{d}x+\int_0^1(\frac{\partial^4 T_\mu g}{\partial x^4})^4\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 g^2\mathrm{d}x. \quad (6)$$

注意如下的事实

$$\iint_{Q_T} z(I-\lambda\Delta)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)z\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

对任意的 $k(x)\in C_0^\infty(I),\Psi(t)\in C_0^\infty(0,T)$，在(5) 式中用 $(T_\mu k)\Psi(t)$ 代替检验函数 φ，得到

$$-\iint_{Q_T} z(I-\lambda\Delta)(T_\mu k)\Psi'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T} v\frac{\partial^4 T_\mu k}{\partial x^4}\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)(T_\mu z)\Psi'(t)k(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T} v(k-\mu T_\mu k)\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)(T_\mu z)\Psi'(t)k(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}(v-\mu T_\mu v)\Psi(t)k(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

由此知道，对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$，有

$$-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)(T_\mu z)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}(v-\mu T_\mu v)\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu z}{\partial t}\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}(v-\mu T_\mu v)\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

表明 $(I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu z}{\partial t}\in L^2(Q_T)$，并且在分布的意义下有

$$(I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu z}{\partial t}=\mu T_\mu v-v. \quad (7)$$

记

$$g_\mu(t)=\int_0^1(I-\lambda\Delta)T_\mu z(x,t)\cdot z(x,t)\mathrm{d}x$$

和证明

$$\lim_{\mu\to 0} g_\mu(t)=0, a.e. t\in(0,T). \quad (8)$$

由于

$$g_\mu(t)=\int_0^1(I-\lambda\Delta)T_\mu z(x,t)\cdot z(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^1(I-\lambda\Delta)(T_\mu z)(\frac{\partial^4 T_\mu z}{\partial x^4}+\mu T_\mu z)\mathrm{d}x=\mu\int_0^1(T_\mu z)^2\mathrm{d}x+\int_0^1(\frac{\partial^2 T_\mu z}{\partial x^2})^2\mathrm{d}x+\lambda\int_0^1(\frac{\partial^3 T_\mu z}{\partial x^3})^2\mathrm{d}x+\lambda\mu\int_0^1(\frac{\partial T_\mu z}{\partial x})^2\mathrm{d}x=\mu\|T_\mu z\|^2+\|\frac{\partial^2 T_\mu z}{\partial x^2}\|^2+\lambda\|\frac{\partial^3 T_\mu z}{\partial x^3}\|^2+\lambda\mu\|\frac{\partial T_\mu z}{\partial x}\|^2\geqslant 0,$$

从而，对几乎所有的 $t\in(0,T)$，

$$\lim_{\mu\to 0}\mu T_\mu z(\cdot,t)=0,\lim_{\mu\to 0}\mu\frac{\partial T_\mu z(\cdot,t)}{\partial x}=0,$$

$$\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial^2 T_\mu z(\cdot,t)}{\partial x^2}=0,\lim_{\mu\to 0}\frac{\partial^3 T_\mu z(\cdot,t)}{\partial x^3}=0.$$

因此，对任意的函数 $\varphi\in H_0^2(Q_T)$，在区域 Q_T 上对方程

$$(\frac{\partial^4 T_\mu z}{\partial x^4}+\mu T_\mu z)\varphi=z\varphi$$

进行积分. 根据分部积分法，有

$$\iint_{Q_T}(\frac{\partial^2 T_\mu z}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\mu T_\mu z\cdot\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T} z\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

因此，可以得到

$$(\iint_{Q_T} z\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^2\leqslant C_\varphi\iint_{Q_T}(\frac{\partial^2 T_\mu z}{\partial x^2})^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C_\varphi\mu\iint_{Q_T}(T_\mu z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0,(\mu\to 0).$$

这表明对几乎处处的 Q_T 有 $z=u_1-u_2=0$.

为了证明(8) 式成立. 对任意的函数 $\Psi(t)\in C_0^\infty(0,T)$，在(5) 式中取 $\varphi(x,t)=(T_\mu z)\Psi(t)$ 并且

使用(7)式,得到

$$-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)z\frac{\partial}{\partial t}((T_\mu z)\Psi(t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}v\frac{\partial^4}{\partial x^4}((T_\mu z)\Psi(t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)z\frac{\partial T_\mu z}{\partial t}\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\Psi'(t)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}v\frac{\partial^4 T_\mu z}{\partial x^4}\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)\frac{\partial T_\mu z}{\partial t}z\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\Psi'(t)\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}v(z-\mu T_\mu z)\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}(v-\mu T_\mu v)z\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\Psi'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}z(v-\mu T_\mu v)\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\Psi'(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+2\iint_{Q_T}z(v-\mu T_\mu v)\Psi(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,$$

即

$$-\int_0^T\Psi'(t)\mathrm{d}t\int_0^1(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\mathrm{d}x+\int_0^T\Psi(t)\mathrm{d}t\cdot 2\int_0^1 z(v-\mu T_\mu v)\mathrm{d}x=-\int_0^T\Psi'(t)g_\mu(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\Psi(t)\mathrm{d}t2\int_0^1 z(v-\mu T_\mu v)\mathrm{d}x=0.$$

因此,

$$g'_\mu(t)=2\int_0^1(\mu T_\mu v-v)z\mathrm{d}x,a.e.t\in(0,T).\tag{9}$$

由此知道 $g'_\mu(t)\in L^1(0,T)$ 并且 $g_\mu(t)$ 在$[0,T]$上是一个绝对连续函数. 记

$$\Psi_\varepsilon(t)=\int_t^\infty\alpha_\varepsilon(s-\varepsilon)\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha_\varepsilon(s)$ 是一维磨光核. 在(5)式中取 $\varphi(x,t)=(T_\mu z)\Psi_\varepsilon(t)$,那么

$$-\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)z\frac{\partial}{\partial t}((T_\mu z)\Psi_\varepsilon(t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}v\frac{\partial^4}{\partial x^4}((T_\mu z)\Psi_\varepsilon(t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\alpha_\varepsilon(t-\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}\Psi_\varepsilon(t)v\frac{\partial^4 T_\mu z}{\partial x^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

因此,根据控制收敛定理[4],得到

$$g_\mu(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\varepsilon}\alpha_\varepsilon(t-\varepsilon)g_\mu(t)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q_T}\alpha_\varepsilon(t-\varepsilon)(I-\lambda\Delta)zT_\mu z\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{Q_T}\Psi_\varepsilon(t)v\frac{\partial^4 T_\mu z}{\partial x^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.\tag{10}$$

结合(6)式、(9)式和(10)式,并注意 $\Phi(s)$ 是非减函数以及 z,v 有相同的符号,有

$$0\leqslant g_\mu(t)=g_\mu(t)-g_\mu(0)=\int_0^t g'_\mu(s)\mathrm{d}s=\int_0^t\mathrm{d}s\cdot 2\int_0^1(\mu T_\mu v-v)z\mathrm{d}x=\int_0^t\mathrm{d}s\cdot 2\int_0^1(\mu T_\mu v)z\mathrm{d}x-\int_0^t\mathrm{d}s\cdot 2\int_0^1 vz\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^t\mathrm{d}s\cdot\int_0^1(\mu T_\mu v)z\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\sqrt{\mu}\iint_{Q_T}\mu(T_\mu v)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\sqrt{\mu}\iint_{Q_T}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{\mu}\iint_{Q_T}(v^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\to 0,(\mu\to 0).$$

定理1证明完毕.

参考文献:

[1] WU Z Q,ZHAO J N,YIN J X,et al. Nonlinear diffusion equations[M]. New York: World Scientific Publishing,2001.

[2] WANG Z,YIN J. Uniqueness of solutions to a viscous diffusion equation[J]. Appl Math Letters, 2004, 17: 1317-1322.

[3] BRéZIS H,CRANDALL M G. Uniqueness of solutions of the initial value problem for $u_t-\Delta\varphi(u)=0$ [J]. J Math Pures et Appl,1979,58:153-163.

[4] 伍卓群,尹景学,王春明. 椭圆与抛物方程引论[M]. 北京:科学出版社,2003.

(责任编辑:凌汉恩　邓大玉)